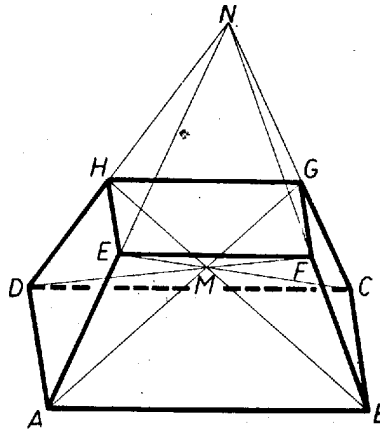


Alkalmazzuk az 1054. feladatban bebizonyított tételt¹ rendre az $ABGH$, $CDEF$, $ADHE$, $BCGF$ négyszögre:

$$\begin{aligned} AG^2 + BH^2 &= AH^2 + BG^2 + 2AB \cdot HG, \\ CE^2 + DF^2 &= CF^2 + DE^2 + 2DC \cdot EF, \\ AH^2 + DE^2 &= AE^2 + DH^2 + 2AD \cdot EH, \\ BG^2 + CF^2 &= BF^2 + CG^2 + 2BC \cdot FG. \end{aligned}$$

E négy egyenlőség összegéből a mindkét oldalon szereplő tagokat elhagyva a kívánt egyenlőség adódik.

Ha bármely két testátló metszi egymást, akkor a 471. gyakorlat² szerint egy M ponton mennek át, hiszen nem lehetnek egy síkban.



Így az AG , DF átlók végpontjai egy síkban vannak. Ez a sík az $ABCD$ és $EFGH$ lapoknak a feltevések folytán párhuzamos síkjait párhuzamos egyenesekben metszi, ezért $AD \parallel FG$. Így EH , AD , FG és BC párhuzamosak, ennél fogva $ABCD$ és $EFGH$ paralelogrammák. Ekkor $AB \cdot HG = DC \cdot EF$, $AD \cdot EH = BC \cdot FG$, és a tétel így egyszerűsödik:

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2 + 4AB \cdot HG + 4AD \cdot EH.$$

Ebben az esetben a test paralelogramma alapú csonka gúla, vagyis az AE , BF , CG , DH élek egy N ponton mennek át. Ugyanis az $ADFG$ trapéz AD és FG oldalainak aránya, vagy ami ugyanaz, az $AD : EH$ arány egyenlő $AM : MG$ -vel, folytatólag M -nek AD és FG -től mért, és tovább az $ABCD$ és $EFGH$ síktól mért távolságainak $m_1 : m_2$ arányával. Ugyanígy $AB : EF = AB : HG = m_1 : m_2$, mert az AG és BH átlók metszéspontja ugyancsak M . Már most az $ABFE$ (konvex) trapéz AE és BF szárjai N metszéspontjának az AB , EF oldalaktól mért távolságai arányának, és így az $AN : EN$ -nek értéke ugyancsak $m_1 : m_2$, és ez áll a $DCGH$, $ADEH$ trapézokra is. Ezzel állításunkat bebizonyítottuk. ($m_1 = m_2$ esetén N nem létezik, ekkor a test paralelepipedon.) Ekkor az $ACGE$ és $BDHF$ trapézok alapján az állítás következő módosulását is kimondhatjuk:

$$AG^2 + BH^2 + CE^2 + DF^2 = AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2 + 2AC \cdot EG + 2BD \cdot FH.$$

Glattfelder Péter (Pannonhalma, Bencés g. IV o.t.)

¹Lásd K. M. L. 23 (1961) 17. o. Ha a $PQRS$ konvex négyszögben $PQ \parallel RS$, akkor $PR^2 + QS^2 = QR^2 + SP^2 + 2 \cdot PQ \cdot RS$.

²Lásd K. M. L. 17 (1958) 57. o. Ha a tér n egyenese közül bármelyik kettő metszi egymást, akkor vagy egy síkban vannak, vagy egy ponton mennek át.

Megjegyzés. Azt, hogy a testátlók közös M pontja létezése esetén a test csonka gúla, a következőkből is sejthetjük. Az $AD : EH = m_1 : m_2 = AB : EF$ aránypárból és a BAD, FGH szögek térbeli váltószög voltából következik, hogy az $ABCD$ és $GHEF$ paralelogrammák hasonló helyzetűek, és hasonlósági pontjuk M . Kézenfekvőnek látszik tehát, hogy a G, H, E, F csúcsok helyére E, F, G, H -t írva ugyancsak létezik hasonlósági pont, és ez N .