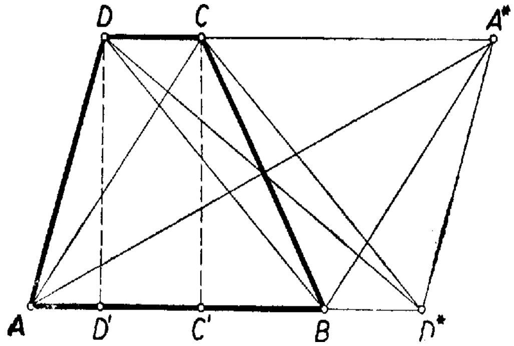


I. megoldás: AB és CD párhuzamossága folytán az $ABCD$ négyszög trapéz. Legyen a C, D csúcs vetülete AB-n C', D', így az ACC', BDD', ADD' és BCC' derékszögű háromszögekből Pythagorász tételével

$$AC^2 = AC'^2 + CC'^2, \qquad AD^2 = AD'^2 + DD'^2,$$
$$BD^2 = BD'^2 + DD'^2, \qquad BC^2 = BC'^2 + CC'^2.$$

Ezekből (1) négyzetes tagjaira

$$AC^2 + BD^2 - AD^2 - BC^2 = = (AC'^2 - AD'^2) + (BD'^2 - BC'^2), \tag{2}$$

és azt kell megmutatnunk, hogy itt a jobb oldal egyenlő $2AB \cdot CD$-vel.

Feltehetjük, hogy az A-nál levő szög nem nagyobb derékszögnél, így a konvexség miatt az AB egyenesen A, D', C' egymás után következő pontok: $AD' < < AC'$. Ezért (2) jobb oldalának első különbsége

$$AC'^2 - AD'^2 = (AC' - AD')(AC' + AD') = D'C'(AC' + AD') = = CD(AC' + AD'). \tag{3}$$

A második különbség B, D' és C' kölcsönös helyzete szerint háromféleképpen alakulhat:

$$AD' < AC' = AB \text{ esetén } (D'B - C'B)(D'B + C'B) = CD(D'B + C'B),$$
$$AD' < AB < AC' \text{ esetén } (D'B - BC')(D'B + BC') = (D'B - BC')CD,$$
$$AB \le AD' < AC' \text{ esetén } (BD' - BC')(BD' + BC') = CD(-BD' - BC').$$

Ezt (3)-hoz adva CD kiemelése után a feltevés figyelembevételével a zárójelben mindig $2AB$ adódik. Evvel az állítást bebizonyítottuk.

Bónis Katalin (Budapest, Veres Pálné lg. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Elkerülhetjük az esetek szétválasztását, ha az átlók négyzetét a trapéz 4 rész–háromszögéből a koszinusz–tétellel fejezzük ki, figyelembe véve, hogy $\cos DCB\sphericalangle = -\cos ABC\sphericalangle$ és $\cos ADC\sphericalangle = -\cos BAD\sphericalangle$:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos ABC\sphericalangle, \tag{4}$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos BAD\sphericalangle, \tag{5}$$
$$AC^2 = CD^2 + AD^2 + 2CD \cdot AD \cos BAD\sphericalangle, \tag{6}$$
$$BD^2 = CD^2 + BC^2 + 2CD \cdot BC \cos ABC\sphericalangle. \tag{7}$$

Adjuk hozzá (6) és (7) AB-szereséhez (4) és (5) CD-szeresét:
$(AB + CD)(AC^2 + BD^2) = (AB + CD)(AD^2 + BC^2) + 2AB \cdot CD(AB + CD)$, amiből a 0-tól különböző $AB + CD$-vel osztva (1)-re jutunk. – Az esetek szétválasztását az tette elkerülhetővé, hogy a koszinusz–tételről annak idején megmutattuk, hogy hegyes-, tompa- és derékszögű háromszögre egyaránt érvényes.

Nagy Irén (Dombóvár, Gőgös I. g. IV. o. t.)

2. Lényegében ugyanígy kerülhetjük el az esetszétválasztást, ha ábránkra koordinátarendszert helyezünk, és a kifejezéseket a csúcsok koordinátáival állítjuk elő.

Lázár Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

3. Az állítás a húrnégyszögre vonatkozó Ptolemaiosz–tétel felhasználásával is bizonyítható.

Nagypál Botond (Orosháza, Táncsics M. g. IV. o. t.)

II. megoldás. Az I. megoldás jelöléseit tovább használva tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC oldal felezőpontjára, legyen A és D képe A^*, D^*, és alkalmazzuk az 1006. feladat[1] első tételét az ABA^*C, BD^*CD és AD^*A^*D paralelogrammákra:

$$2AC^2+2AB^2=AA^{*2}+BC^2, \tag{8}$$

$$2BD^2+2CD^2=DD^{*2}+BC^2, \tag{9}$$

$$2AD^2+2(AB+CD)^2=AA^{*2}+DD^{*2}. \tag{10}$$

Mármost (8) és (9) összegéből (10)-et kivonva rendezés és egyszerűsítés után (1)-et kapjuk.

Molnár Emil (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

III. megoldás. Az állítást vektoralgebrai úton bizonyítjuk.

$$\begin{gathered}AC^2+BD^2=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{BD}^2=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})^2+(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DC})^2=\\=AD^2+BC^2+2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DC}^2-2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{BC}=\\=AD^2+BC^2+2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB})\cdot\overrightarrow{DC}=AD^2+BC^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}.\end{gathered}$$

Ha már most $AB\parallel CD$, és a trapéz nem hurkolt, vagyis AB és DC egyirányúak, akkor

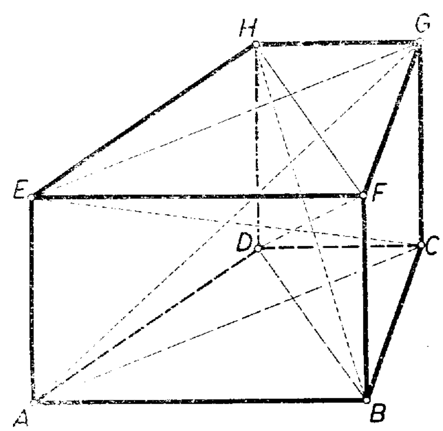
$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2+2AB\cdot CD,$$

amit bizonyítanunk kellett. Egyúttal a tétel általánosítását kaptuk tetszés szerinti konvex négyszögre: ha az AB és CD oldalak szöge φ, akkor

$$AC^2+BD^2=AD^2+BC^2+2AB\cdot CD\cos\varphi.$$

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzés. A bebizonyított tétel és az 1006. feladat segédtétele felhasználásával kifejezhetjük a trapéz alapú hasáb testátlóinak négyzetösszegét az éleivel.



Ha az $ABCD$ trapéz ($AB\parallel CD$) alapú $ABCDEFGH$ hasáb oldalélei AE, BF, CG, DH, akkor a testátlók négyzetösszege, mint az $ACGE$ és $BDHF$ paralelogrammák átlóinak négyzetösszege:

$$\begin{gathered}(AG^2+CE^2)+(BH^2+DF^2)=2AC^2+2BD^2+4AE^2=2AD^2+2BC^2+4AB\cdot CD+4AE^2=\\=(AD^2+BC^2+EH^2+FG^2)+(AE^2+BF^2+CG^2+DH^2)+2AB\cdot CD+2EF\cdot GH.\end{gathered}$$

Kunszt Zoltán (Pápa, Türr I. g. III. o. t.)

[1] Lásd a megoldást K. M. L. 21 (1960) 20. o.