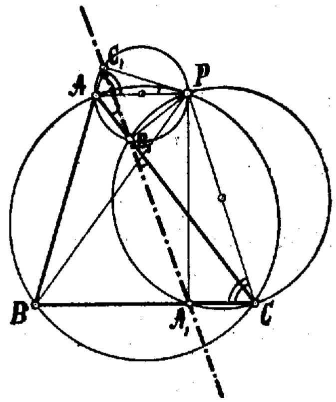
Ha egy háromszögnek a csúcsain átmenő kör kerületének egy tetszésszerinti P pontjából a háromszög oldalaira merőlegeseket rajzolunk, akkor e merőlegesek talppontjai egy egyenesen, a P ponthoz tartozó Simson-féle egyenesen feküsznek; tehát a háromszög köré írható kör mértani helye ama pontoknak, melyeknek a háromszög oldalaira való vetületei egy egyenesbe esnek. Adjuk ezen érdekes tételnek néhány egyszerű bizonyítását.

I. bizonyítás. A P pontból az oldalakra rajzolt merőlegesek talppontjai: A_1, B_1, C_1. Ki kell mutatnunk, hogy e pontok egy egyenesbe esnek, vagyis, hogy a C_1B_1 és B_1A_1 egyenesek egy egyenest alkotnak.



1. ábra

Minthogy a C_1B_1A és CB_1A_1 szögek egy-egy szára a háromszögnek AC oldalába esik, csak azt kell kimutatnunk, *hogy e szögek egyenlők,* mert akkor a B_1C_1 és B_1A_1 szárak is egy egyenesbe esnek. Az AC_1PB_1 és B_1PCA_1 négyszögek húrnégyszögek, tehát csúcsaikon át kört fektethetünk.

Így tehát $C_1PA\sphericalangle = C_1B_1A\sphericalangle$ és $A_1B_1C\sphericalangle = A_1PC\sphericalangle$; de $BAPC$ is húrnégyszög, miért is $C_1AP\sphericalangle = A_1CP\sphericalangle$ (mindegyik $180°$-ra egészíti ki a BAP szöget). Ez utóbbi szögek azonban pótló szögei az APC_1 és A_1PC szögeknek s így ezek is egyenlők. Látjuk tehát, hogy $APC_1\sphericalangle = A_1PC\sphericalangle = AB_1C_1\sphericalangle = A_1B_1C\sphericalangle$.

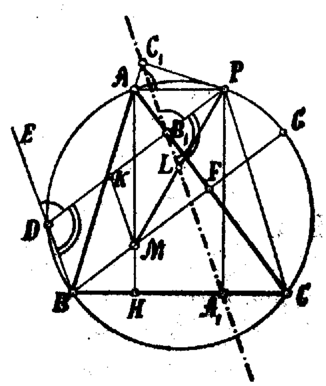
E bizonyítással lényegileg megegyezik, de rövidsége miatt érdekesebb a

II. (Baltzer-féle) bizonyítás. (L. 1. ábra.) Minthogy PC_1AB_1 és PA_1BC_1 húrnégyszögek, azért

$$PC_1B_1\sphericalangle = B_1AP\sphericalangle = CAP\sphericalangle = CBP\sphericalangle = PBA_1\sphericalangle = PC_1A_1\sphericalangle.$$

De ha $PC_1B_1\sphericalangle = PC_1A_1\sphericalangle$, akkor C_1, B_1 és A_1 pontok egy egyensen vannak.

III. bizonyítás. (L. 2. ábra.)



2. ábra

Kimutatjuk, hogy C_1B_1 és B_1A_1 egyenesek párhuzamosak egy harmadik egyenessel, miből következik, hogy C_1B_1 és B_1A_1 egyenes alkotnak. Hosszabbítsuk meg PB_1-et D-ig és rajzoljuk meg a BDE egyenest. $C_1AP\sphericalangle + PAB\sphericalangle = 180°$; $EDP\sphericalangle + PDB\sphericalangle = 180°$; de $PAB\sphericalangle = PDB\sphericalangle$, mert egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek s így $EDP\sphericalangle = C_1AP\sphericalangle$; de a C_1AB_1P húrnégyszögből $C_1AP\sphericalangle = C_1B_1P\sphericalangle$, tehát $EDP\sphericalangle = C_1B_1P\sphericalangle$. Látjuk tehát, hogy $C_1B_1 \parallel DB$. Minthogy továbbá PB_1A_1C húrnégyszög, azért $PB_1A_1\sphericalangle + A_1CP\sphericalangle = 180°$, de $A_1CP\sphericalangle + BDP\sphericalangle = 180°$, s így $PDB\sphericalangle = PB_1A_1\sphericalangle$. Tehát $B_1A_1 \parallel DB$. Minthogy tehát $C_1B_1 \parallel BD \parallel B_1A_1$, azért C_1B_1 és B_1A_1 egy egyenest alkotnak.

Ezek alapján bebizonythatjuk a következő tételeket:

630*. 1°. *A P ponthoz tartozó Simson-féle egyenes felezi azt az egyenest, mely a P pontot a háromszög magassági pontjával összeköti.*

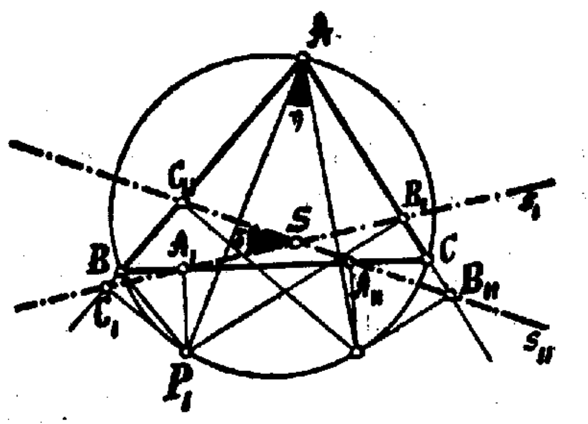
2°. *A P_1 és P_2 pontokhoz tartozó s_1 és s_2 Simson-féle egyenesek által bezárt szög egyenlő a P_1P_2 ívhez tartozó kerületi szöggel.*

3°. *A körülírt kör változó átmérőjének végpontjaihoz tartozó Simson-féle egyenesek metszőpontjainak mértani helye a Feuerbach-féle kör.*

1°. (2. ábra.) Mérjük rá a B_1D távolságra a PB_1 távolságot úgy, hogy $PB_1 = B_1K$ legyen s hosszabbítsuk meg a BF magasságot G-ig.

Minthogy $MF = FG$,[1] azért $KPGM$ egyenlőszárú trapéz; $DP \parallel BG$ és $DB = PG$ s így $BDPG$ is egyenlőszárú trapéz. De az előbbeniek (III. bizonyítás) értelmében $BD \parallel C_1A_1$ s így KM is párhuzamos C_1A_1-gyel. Minthogy tehát a Simson-féle egyenes párhuzamos KM-mel s felezi a PK távolságot, azért a PKM háromszög PM oldalát is felezi, vagyis keresztül megy ezen egyenesenek L középpontján.

2°. (3. ábra.) Legyenek a P_1 és P_2 pontokból az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, az s_1 és s_2 Simson-féle egyenesek metszéspontja S.



3. ábra

A tétel a következőképp bizonytható:

A $P_1A_1BC_1$ és a $P_1B_1AC_1$ húrnégyszögek, s így

$$CAP_1\sphericalangle = B_1C_1P_1\sphericalangle = A_1BP_1\sphericalangle = \alpha + \gamma - (90° - BA_1C\sphericalangle),$$

tehát

$$BAP_1\sphericalangle = \alpha - CAP_1\sphericalangle = 90° - \gamma - BA_1C_1\sphericalangle \tag{1}$$

hasonló eljárás után a $P_2B_2CA_2$ és a $P_2B_2AC_2$ húrnégyszögekből kapjuk, hogy

$$CAP_2\sphericalangle = \alpha - BAP_2\sphericalangle = 90° - \beta - CA_2B_2\sphericalangle \tag{2}$$

Az (1)-et és (2)-őt tekintetbe véve, felírhatjuk, hogy

$$\eta = P_1AP_2\sphericalangle = \alpha - BAP_1\sphericalangle + CAP_2\sphericalangle) = (\alpha + \beta + \gamma) - 180° + BA_1C_1\sphericalangle + CA_2B_2\sphericalangle)$$

vagy

$$\eta = BA_1C_1\sphericalangle + CA_2B_2\sphericalangle \tag{3}$$

Ámde az s_1 és s_2 által bezárt δ szög külszöge az A_1SA_2 háromszögnek, s így

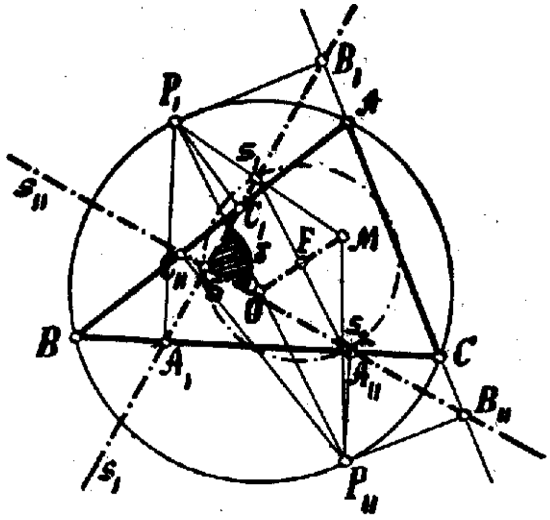
$$\delta = BA_1C_1\sphericalangle + CA_2B_2\sphericalangle. \tag{4}$$

[1] *Jegyzet.* $CAH\sphericalangle = CBF\sphericalangle$, mert mindkét szög a BCA szöget 90°-ra egészíti ki; $CBF\sphericalangle = CBG\sphericalangle = CAG\sphericalangle$, mert a GC ívhez tartozó kerületi szögek egyenlők. Így tehát $CAH\sphericalangle = CAG\sphericalangle$, de $MG \perp AC$, miért is $MF = FG$.

A (3) és (4) alapján közvetlenül látható, hogy

$$\delta = \eta.$$

3°. (4. ábra.) Kössük össze a változó átmérő P_1 és P_2 végpontjait M-mel, a háromszög magasságpontjával s jelöljük P_1M és P_2M metszéspontjait az s_1 és s_2 Simson-féle egyenesekkel S_1 és S_2-vel. Legyen a háromszög köré írható kör középpontja O s végre az S_1S_2 és OM egyenesek metszéspontja F.



4. ábra

Az előbbeniek alapján:

$$\delta = 90°,\ P_1S_1 = S_1M,\ P_2S_2 = S_2M,$$

s minthogy

$$P_1O = P_2O,$$

azért az MS_1S_2 és MP_1P_2 háromszögek hasonlók. De ekkor:

$$MF = OF \text{ és } S_1S_2 = \frac{P_1P_2}{2} = \frac{r}{2}.$$

Látjuk, hogy F középpontja ama egyenesnek, mely a magassági pontot a háromszög köré írható kör középpontjával összeköti, miért is F a Feuerbach-féle kör középpontja (V. évfolyam 22. lap). Minthogy továbbá $S_1S_2 = \frac{r}{2}$ és $\delta = 90°$, azért S_1S_2 a Feuerbach-féle kör átmérője és a Simson-féle egyenesek metszéspontjának, S-nek, a mértani helye a Feuerbach-féle kör (IV. 46. lap).

(Antal Márkus.)

A feladatot még megoldották: Freibauer E., Krisztián Gy., Kornis Ö., Krausz B., Lukhaub Gy., Sasvári G.