a) Ismeretes, hogy egy adott S síkban fekvő és a sík két adott A, B pontjától egyenlő távolságra levő egyenesek összessége – mértani helye – két részből tevődik össze: I.α) egyrészt az AB szakasz C_1 felező pontján átmenő, I.β) másrészt az AB-vel párhuzamos egyenesek összességéből.[1] Esetünkben a C harmadik csúcs is szerepel, ezért a keresett egyenesnek bele kell tartoznia az A és C, valamint a B és C pontpártól egyenlő távolságra levő egyenesek összességébe is, vagyis a fenti feltételek egyikén felül teljesítenie kell a következő feltételpárok egy–egy feltételét is:

II. *α)* átmegy AC-nek B_1 felezőpontján,
β) vagy párhuzamos AC-vel,
III. *α)* átmegy BC-nek A_1 felezőpontján,
β) vagy párhuzamos BC-vel.

Az ABC háromszög oldalai különböző irányúak, ezért a *β)* feltétel legfeljebb egy pontpárra teljesülhet; hasonlóan az *α)* feltétel legfeljebb 2 pontpárra, mert az A_1, B_1, C_1 pontok nincsenek egy egyenesen. Mivel pedig az $A_1B_1C_1$ háromszög c_1, a_1, b_1 oldalai az ABC háromszögben középvonalak és rendre párhuzamosak AB, BC, CA-val, azért e középvonalak, és csak ezek, megfelelnek a követelménynek.

b) Tegyük fel, hogy van az S-sel párhuzamos és A, B, C-től egyenlő távolságra levő egyenes, és legyen egy ilyen e, vagyis ha A, B, C vetülete e-re A', B', C', akkor $AA'=BB'=CC'=d$. Legyen továbbá A', B', C' vetülete S-re A'', B'', C'', ezek e-nek S-re való e'' vetületén vannak és $A'A''=B'B''=C'C''=t$. Ekkor az $AA'A''$, $BB'B''$ és $CC'C''$ derékszögű háromszögek egybevágók, mert 2–2 oldaluk egyenlő: d, ill. t, a d-vel szemben mindháromban derékszög fekszik, és ezért d nagyobb t-nél. Így $AA''=BB''=CC''=d'$.

Az említett háromszögek síkjai merőlegesek e-re és így e''-re is, mert pl. $AA'\perp e$, és $A'A''\perp e''\parallel e$. Ezért AA'', BB'', CC'' merőlegesek e''-re, és az egyenlő AA'', BB'', CC'' szakaszok az ABC háromszög csúcsainak e''-től való távolságát adják. Azt nyertük tehát, hogy e'' azonos az S–sík *a)* alatt meghatározott egyenesei egyikével, tehát e az S-re a_1, b_1, c_1-ben emelt merőleges síkok valamelyikének egy az S-sel párhuzamos egyenese.

c) Feltéve, hogy van olyan az i-vel párhuzamos e egyenes, amelyre az előbbi jelölésekkel $AA'=BB'=CC'=d$, vetítsük a rendszert egy az i-re merőleges S^* síkra és legyen A, B, C vetülete A_0, B_0, C_0, továbbá e, A', B', C' egybeeső vetülete az E pont. Ekkor AA', BB', CC' párhuzamosak S^*-gal, és ezért vetületükre $A_0E=B_0E=C_0E=d$, vagyis E az S^*-nak az A_0, B_0, C_0-tól egyenlő távolságra levő pontja, az $A_0B_0C_0$ háromszög köré írt kör középpontja; e pedig az E-n átmenő, i-vel párhuzamos egyenes.

A_0, B_0, C_0 egymástól különböző, nem egy egyenesbe eső pontok, mert A, B, C, vetülete csak az S-re merőleges síkon eshet páronként egybe, vagy egy egyenesbe, ilyen S^* viszont csak az S-ben fekvő i-hez tartozhat. Nyilvánvaló végül, hogy bármely az i-re merőleges S^*-ot véve ugyanazon e-hez jutunk, tehát ebben az esetben egy és csak egy megfelelő egyenes van.

Varga Szabolcs (Miskolc, Bláthy O. vill. ip. t. IV. o. t.)

[1] Lásd *Vigassy Lajos:* Egyenesek mértani helye. K. M. L. 20 (1960) 82–91. o., közelebbről 83. o.