"Elemek": X. könyv.

Euklides művének eme legterjedelmesebb könyvében összegyűjti mindazt, a mit Plato iskolájában az összemérhetetlen mennyiségekről megállapítottak; kiválóan Teheaetetos, az iskola egyik tagja tette tüzetes tanulmányok tárgyává a mennyiségek eme fajtáját. Érdekes dolog azonban itt az, hogy míg Pythagoras és Plato iskolájában a manapság irraczionálisaknak nevezett mennyiségeket közösen "kimondhatatlan"-oknak mondták, addig Euklides eme mennyiségeket különböző fajaik szerint osztályozza.

Az 1. definíczió szerint azok a mennyiségek, melyeknek közös mértékük van, összemérhetők, a 2. szerint, a melyeknek nincs, összemérhetetlenek ($\alpha\sigma\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\rho o\nu$). Ezek volnának tehát az irraczionális ($\alpha\lambda o\gamma o\nu$) mennyiségek. A 3. definíczió szerint: mennyiségek hatványban összemérhetők, ha négyzeteik mérhetők egy közös területi egységgel; ilyeneket azonban Euklides még ($\rho\eta\tau o\nu$) mennyiségeknek tekint; mai jelölésünk szerint ilyenek: $\sqrt{a}$ és $\sqrt{b}$ volnának, ha négyzeteik: a és b összemérhetők. Csak az oly mennyiségek összemérhetetlenek Euklides szerint a 4. definíczió alapján, melyek még négyzeteikben is összemérhetetlenek; ilyen pl.: $\sqrt[4]{a}$ és $\sqrt[4]{b}$, ha a és b még összemérhetetlen. Nagy gonddal és óvatossággal bánik el Euklides a mennyiségekkel, a mikor megállapítja összemérhetőségüket vagy összemérhetetlenségüket, de alapjában véve néha túlságos körülményes vizsgálatokat eszközöl e tekintetben; ezt azonban azok a nehézségek hozzák magukkal, melyeket az irraczionális mennyiségeknek vonalok által való jelzése támaszt.

Az 1. feladatban oly tétellel ismerkedünk meg, melyen egy egész önálló, érdekes mathematikai módszer alapul. A tétel így szól:

Ha két nem egyenlő mennyiség van adva és a nagyobbikból elvesszük felét vagy a felénél nagyobbat, a maradékból ismét a felét vagy a felénél nagyobbat és ezt így tovább folytatjuk: marad végre oly mennyiség, mely az adott kisebb mennyiségnél is kisebb.

A tétel értelme ez: legyen a két adott mennyiség A és B és $A > B$; akkor:

$$A \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta \ldots < B,$$

ha $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$ mennyiségek mindegyike $\leqq \frac{1}{2}$.

Euklides e tétel által azt az utat akarja megjelölni, a melyen egyik mennyiségből kiindulva folytonos felosztás, megközelítés alapján a másikat lehet elérni.

Megjegyzem e helyen azt is, hogy e tételnél még arra a megszorításra sincs szükség, melyet Euklides megtesz, hogy az $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ mennyiségek mindegyike $\leqq \frac{1}{2}$ legyen, elég, ha azok mindegyike kisebb 1-nél. Euklides azonban e tétel kimondása által a XII. könyvének 2. feladatát készíti elő, melyben a határ: $\frac{1}{2}$. E feladat tárgyalásánál fogunk egyszersmind azzal a módszerrel is bővebben megismerkedni, melynek alapköve a X. könyv 1. feladatában kimondott tétel.

Az összemérhetetlenségnek mintegy praktikus magyarázatát a 2. feladat adja:

Ha két nem egyenlő mennyiség közül folytonosan váltogatva a nagyobból a kisebbiket levonjuk és a maradék soha sem foglaltatik az előtte való mennyiségben, a két mennyiség összemérhetetlen.

A 3. feladat tárgya két összemérhető mennyiség legnagyobb közös mértékének felkeresése a váltogatott lemérések segélyével.

A 7. feladat az összemérhetetlenségnek ezt a magyarázatát adja:

Az összemérhetetlen mennyiségek nincsenek egymáshoz oly arányban, mint szám a számhoz.

A 29. feladat azt a czélt tűzi ki, hogy kerestessék két oly szám, melyeknek négyzetei összeadva ismét teljes négyzetet adnak; ez tehát az $a^2 + b^2 = c^2$ egyenlet egész számú megoldása, geometriailag pedig egész számok által mérhető oldalakkal bíró derékszögű, szóval pythagorasi háromszögek felkeresése.

Mint tudjuk, speciális esetekben e feladatot már Pythagoras (IV. évf. 127. lap) és Plato (V. évf. 62. lap) oldották meg és meg is adták az ilynemű számoknak megfelelő szerkesztési módját, képletét. Euklides teljes általánosságban adja a feladat megoldását, a melyben az egyes oldalok számára körülbelül a következő képleteket adja:

$$a = klm, \; b = \frac{kl^2 - km^2}{2}, \; c = \frac{kl^2 + km^2}{2}.$$

A 32., 33. meg a 34. és 35. feladatban a $\sqrt{a\sqrt{b}}$ és $\sqrt[4]{ab}$ alakú számok fordulnak elő, melyeket Euklides *medialis vonaloknak* ($\mu\epsilon'\sigma\eta$) nevez. A 37-73. feladatok az $a+\sqrt{b}$ és $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, a 74-116. feladatok pedig az $a-\sqrt{b}$ és $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ alakú mennyiségeket tárgyalják; az előbbiek a *binomialisok* ($\eta'\ \epsilon'\chi\ \delta\upsilon o\iota\nu\ \acute{o}\nu o\mu\acute{\alpha}\tau\omega\nu$), az utóbbiak az *apotomák* ($\acute{\alpha}\pi o\tau o\mu\eta$), az elvágás által keletkezett mennyiségek.

Végre a 117. feladat azt az érdekes bizonyítást adja, hogy *a négyzetben az átló összemérhetetlen az oldallal*, vagyis hogy $\sqrt{2}$ irraczionális szám. A bizonyítás menete ugyanaz, mint a manapság szokásos bizonyításé; ha az átló: d és az oldal: a összemérhető volna, úgy a

$$d : a = m : n$$

és ebből:

$$d^2 : a^2 = m^2 : n^2$$

érvényes; de továbbá

$$d^2 : a^2 = 2 : 1$$

s így

$$\frac{m^2}{n^2} = 2$$

lenne; pedig már Plato is tudta, hogy nincs oly négyzetszám, mely egy másik négyzetszámnak éppen a kétszerese. (V. évf. 63. lap.)

Baumgartner Alajos.