"*Elemek*": *V. könyv.*

Ez a könyv az aránylatok tana, Eudoxus könyve. Az alakja természetesen szintén geometriai, mert itt is oly mennyiségek szerepelnek, melyek akkortájt nem voltak számbelileg kifejezhetők, geometriai tárgyalásuk azonban lehetséges volt. Könnyebb áttekinthetőség kedvéért azonban az e könyvben foglalt feladatok lényegét modern algebrai kifejezéseink segélyével fogom megadni, melyekben $A,\ B,\ C, \ldots$ általános mennyiségeket jelentsenek, melyeket Euklides vonalokkal ábrázol, $m,\ n,\ p,\ \ldots$ pedig mindig egész számokat, melyeknek Euklides a példának megfelelően kis értékeket ad. A könyv 20 definíciója közül a következők méltók említésre:

4. Két mennyiség akkor van arányban, ha az egyik megszorozva, a másikat adja.

E definíció igen mély értelmű, mert azt is kifejezi, hogy az arányban levő mennyiségek egyneműek legyenek.

13. Az arány cserélése, az előtagnak előtaghoz és az utótagnak utótaghoz való vétele.

Ha $A : B = C : D$, akkor $A : C = B : D$ is jó.

14. Az arány megfordítása az előtagnak utótagul és az utótagnak előtagul való vétele.

Ha $A : B = C : D$ aránylatban ezt tesszük, a $B : A = D : C$ helyes aránylatot nyerjük

A 15. definició arra vonatkozik, hogy ha $A : B = C : D$, akkor $(A + B) : B = (C + D) : D$, a 16. definíció pedig $(A - B) : B = (C - D) : D$.

A definíciók után következő 25 feladat az arányokról és aránylatokról szóló legváltozatosabb tételeket tartalmazza. A legfontosabbak ezek:

4. *Ha négy mennyiség aránylatban van, az elsőnek és harmadiknak egyenlő szorzatai, meg a másodiknak és negyediknek egyenlő szorzatai is ugyanazon aránylatban vannak.*

A szövegezés kissé nehézkes, azért adom meg külön az értelmét: ha $A : B = C : D$, akkor $mA : nB = mC : nD$.

A következőkben csakis a feladatok tartalmát adom meg a mi modern jelöléseinkkel.

7. Ha $A = B$, akkor $A : C = B : C$

8. Ha $A > B$, akkor $A : C > B : C$ és $C : A < C : B$.

A 9. és 10. feladat emezek megfordításai.

11. Ha $A : B = C : D$ és $C : D = E : F$, akkor $A : B = E : F$.

12. Az előbbi három aránylatba ez is tartozik: $(A + C + E) : (B + D + F)$.

14. A mint $A : B = C : D$ aránylatban $A \gtreqless B$, a szerint C is $\gtreqless D$.

15. $A : B = mA : mB$.

16–19. feladatok az arányok felcserélésére és a tagok összegeinek és különbségeinek arányára vonatkoznak.

A 20–24. feladatok az összetett aránylatok tételeit tartalmazzák. Példának álljon közülök a 24. feladat: ha $A : C = D : F$ és $B : C = E : F$, akkor $(A + B) : C = (D + E) : F$.

Végre közlésre méltó az utolsó feladat.

25. *Ha négy mennyiség van egy aránylatban, a legnagyobb és legkisebb tag összege mindig nagyobb a másik két tag összegénél.*

"*Elemek*": *VI. könyv.*

Ámbár az V. könyv az aránylatok tanát teljes általánosságban és a mennyiségek minden fajtájára vonatkozólag geometriai szemléltetéssel tárgyalja, még mindig kiegészítésre szorul, mely kiegészítés a régiek módja szerint ismét csak geometriai lehet. E kiegészítés a VI. könyv, mely az aránylatoknak a geometriára vonatkozó alkalmazását, nevezetesen a hasonló idomok körében, foglalja magában.

Az 5 definíció közül említésre méltó az első:

Hasonlók azok az egyenes vonalú idomok, melyeknek megfelelő szögei egyenlők és az egyenlő szögeket bezáró oldalai arányosak.

A 3. definíció ismét az aranymetszésre vonatkozik, a 4. definíció az idom magasságának fogalmát adja.

Az 1. feladatnak ez a tétele: *egyenlő magasságú háromszögek és parallelogrammok úgy aránylanak egymáshoz, mint alapjaik.*

A 2. és 3. feladat hasonló háromszögeknek egyéb megfelelő részei közötti arányosságát állapítja meg.

A 4. 5. 6. 7. feladat a négy hasonlósági esetet tárgyalja.

A 8. feladat a derékszögű háromszögnek és a derékszög csúcsából az átfogóra bocsátott magassság által képezett új derékszögű háromszögeknek hasonlósági viszonyaival foglalkozik.

A 9. feladat egy adott egyenesnek egyenlő, a 10. feladat pedig egy megadott arány szerinti részekre való osztását végzi.

A 13. feladat két egyenesnek középarányosát szerkeszti meg ama tétel alapján, hogy az átmérőre merőlegesen emelt félhúr középarányos az átmérő szeletei között.

A 16. feladat azt a tételt mondja ki geometriai alakban, hogy minden aránylatban a kültagok szorzata egyenlő a beltagokéval.

A 19. feladat tétele az, hogy *hasonló háromszögek úgy aránylanak egymáshoz, mint oldalaik négyzetei.*

A 28. és 29. feladatok ismét az elliptikus és a hyperbolikus felületvetést tárgyalják, épp úgy, mint a II. könyv 5. és 6. feladatai (l. VI. évf. 43. 44. lap), de nem téglalapok, hanem általános parallelogrammok segélyével.

A 30. feladat ismét az aranymetszés.

Az utolsó feladat a 33. számú:

Egyenlő körökben a szögek úgy aránylanak egymáshoz, mint a hozzájuk tartozó kerületi ívek, akár középpontiak, akár kerületiek e szögek.

VII., VIII. és IX. könyv.

E három, tárgyilag összefüggő könyv a számok tanával foglalkozik; első esetben van tehát Euklides művében tiszta arithmetikával dolgunk, minden geometriai tárgyalás nélkül. Mind a három könyv tárgya annyira közös, hogy csakis a VII. könyv tartalmaz definíciókat, melyek a VIII. és IX. könyv tartalmára is szólnak.

A VII. könyv 1. definíciója bevezeti az *egységet*, mely a 2. szerint a számokat méri. A 6-10. definíciók a páros és páratlan számokat tárgyalják; a 11. az abszolut -, a 12. a relatívprím számokat definiálja. Euklides mégis csak megint geometriára gondol, mikor a 16. definícióban a két tényezőből álló szorzatot felületi számnak, a 17.-ben pedig három tényeőből álló szorzatot testszámnak nevezei; geometriai alapú továbbá a még mai nap is használatos "négyzetszám" és "köbszám" elnevezés a 18. és 19. definícióban.

A 20. definíció az aránylatot tárgyalja: Számok akkor képeznek aránylatot, ha az első a másodiknak és a harmadik a negyediknek ugyanannyiszorosa vagy ugyanannyiad része.

A 22. definíció végre azokról a számokról szól, melyek osztóiknak összegei és melyeket Euklides is Pythagoras nyomán tökéletes számoknak nevez (l. K. M. L. IV. évf. 90. lap).

A VII. könyv 1., 2. és 3. feldatai a közös osztók és a legnagyobb közös osztó ismeretes meghatározását tárgyalja oly módon, mint a hogy e feladatokat mai napság is elvégezzük: az utolsó osztónak a maradék által való elosztása alapján. A 4-11. feladatok mind azok a tételek, a melyek a számok oszthatóságára vagy nem oszthatóságára vonatkoznak, ha azokat a különböző műveletek segélyével változtatjuk.

A 12-15. feladatok az aránylatok tagjainak változtatására vonatkoznak, a 16. feladat kimondja a szorzás kommutatív elvét.

A 20. feldadat a mértani közép ily fogalmazásban:

Ha három szám folytonos aránylatban van, a szélső számok felületi száma egyenlő a középső szám négyzetszámával.

A 23-30. feladatok a relatív prímszámok különböző tételei, a 31. feladat pedig az a tétel, hogy *minden abszolut prímszám minden számhoz, melynek nem osztója, relatív prímszám.*

A 35. feladat az arányok rövidítése, a 36. a legkisebb közös többes felkeresése.

A VII. könyv összesen 41 feladatot tartalmaz.

A VIII. könyv 27 feladata közül a legtöbb a mértani haladványt tárgyalja antik alakjában, a folytonos aránylatokéban. Így pl. az 1. feladatban Euklides ezt a mértani haladványt: $8,\ 12,\ 18,\ 27$ így jelzi: $8:12=12:18=18:27$.

A többi feladat a felületi-, test-, négyzet- és köbszámokra vonatkozik, igen egyszerű, majdnem a definíciójukból kifolyó tételek alakjában.

A IX. könyv eleje ugyane dolgokat öleli fel, majd ismét összeköti e különböző fajtájú számokat a folytonos aránylatokkal. A 20. feladat meglehetősen minden a tárggyal való szorosabb összefüggés nélkül azt a különben igen érdekes és nevezetes tételt mondja ki:

Abszolut prímszám minden felvett abszolut prímszám mennyiségénél több van, vagyis az abszolut prímszámok száma végtelen sok; ugyanis ha a sor szerint következő bárhány absolut prímszám szorzatát képezzük és e szorzathoz az egységet hozzáadjuk, mindig újra abszolut prímszámot kapunk.

A 21-34. feladatok a páros és páratlan számokkal való műveletek eredményeit tárgyalják.

A 35. feladat egyike a leginkább bámulatot keltő eredményeknek, a mértani haladvány egyik tétele:

Ha akárhány szám folytonos arányban van és a másodiktól is meg az utolsótól elvesszük az elsőt, akkor e különbségek úgy aránylanak egymáshoz, mint az első tag az egész sor összegéhez, leszámítva az utolsó tagot, mely tételnek megfelelő képlete ez:

$$(a_2-a_1):(a_n-a_1)=a_1:S_{n-1}.$$

E képlet tehát egy bizonyos számú taggal bíró sor összegét tartalmazza és így a sor összegének meghatározására fel is használható. Ennek alapján Euklides tudta azt is, hogy ha $a_1=1$ és $a_2=2$, akkor:

$$2^n-1=1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}.$$

E mértani sort, illetőleg folytonos aránylatot alapul véve a IX. könyvet befejező 36. feladatban még egy érdekes tételt ad, mely szerint az $1+2+4+8\ldots$ sor összege néha absolut prímszám (pl. $1,\ 2,\ 3,\ 5$ tag esetében) és ha az ily prímszámot a sor utolsó tagjával megszorozzuk, tökéletes számot kapunk, mai jelölésünkben tehát:

$$(1+2+2^2+\ldots+2^n).2^n$$

tökéletes számot ad, ha a zárójelben foglalt mennyiség abszolut prímszám.

Baumgartner Alajos.