Euklides.

"Elemek": I. könyv.

(Folytatás.)

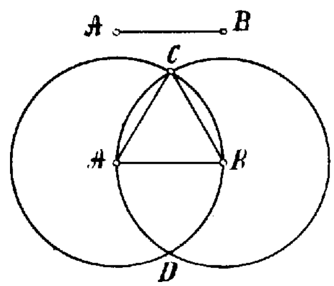
A definíciók, posztulátumok és axiomák után Euklides végre áttér a tulajdonképpeni anyagra, melyet önálló feladatokban tárgyal. E feladatok kétféle természetűek: vagy igazi feladatok, problémák, vagy pedig tantételek, theorémák. Mindkettőnél megtartja azt a módot, melyet azóta általánosan *Euklidesi formá*nak neveznek és mely abban áll, hogy mindenekelőtt kimondja a problémát vagy a theorémát, azután megadja a problémánál a megfejtést ($\chi\alpha\tau\alpha\sigma\chi\varepsilon\nu\eta'$), a theorémánál pedig a bizonyítást ($\alpha'\pi o\delta\varepsilon\iota\xi\iota\varsigma$), ezek után pedig kivétel nélkül hozzáfüggesti záradékul az előbbinél: $\acute{o}\pi\varepsilon\rho$ ε"o'$\varepsilon\iota$ $\pi o\iota\eta'\sigma\alpha\iota$ (a későbbi latin: quad erat faciendum), az utóbbinál: $\acute{o}\pi\varepsilon\rho$ ε"o'$\varepsilon\iota$ $\delta\varepsilon\iota\xi\alpha\iota$, a későbbi híres Q.E.D.=quad erat demonstrandum.

A megfejtés vagy a bizonyítás igen beható, a legapróbb részletek felemlítésével. Euklides úgy ír, hogy a minden előtanulmány nélküli laikus is megérti; a levezetés lassú lépésekben halad előre, ugrások nélkül, biztosan, meggyőzően. Sok leírás helyett inkább példát mutatok be, a minek mindjárt az 1. feladat kínálkozik.

Adott egyenesre szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget.

Legyen az adott egyenes AB.

Erre az egyenesre kell egyenlő oldalú háromszöget szerkeszteni. Az A középpontból rajzoljunk AB távolsággal BCD kört és B középpontból BA távolsággal ACD kört és a C pontból, a melyben a körök egymást metszik, húzzunk az A és B pontokhoz CA és CB egyeneseket.



Minthogy az A pont a BCD körnek középpontja, AC egyenlő AB-vel; és mert a B pont az ACD körnek középpontja, BC egyenlő BA-val. Megmutattuk tehát, hogy CA egyenlő AB-vel, tehát mind CA, mind CB egyenlők AB-vel. De mivel ugyanavval egyenlők, egymással is egyenlők, CA egyenlő CB-vel; CA, AB, BC tehát mindhárman egyenlők egymással.

Az ABC háromszög tehát egyenlő oldalú és AB egyenesre van szerkesztve. Adott egyenesre tehát egyenlő oldalú háromszöget szerkesztettünk, a mit tenni kellett.

Íme, szószerint az 1. feladat! Alaposság hiánya és gyors haladás miatt nincs okunk panaszkodni, de a miatt sem, hogy a feladatok elvégzése nagy szellemi megerőltetéssel járna; erre szolgáljon további például a 3. feladat:

Két adott egyenes közül vágjunk el a nagyobbikból a kisebbikkel egyenlő darabot.

Az első theoréma a 4. feladat:

Ha két háromszögben egyiknek két oldala külön-külön egyenlő a másiknak két oldalával és az egyenlő oldalak által bezárt szög is egyenlő a másik szöggel, akkor a háromszögek harmadik oldalai is egyenlők egymással és a háromszögek is és a többi szögek is, melyeket az egyenlő aldalak bezárnak, egyenlők egymással.

E feladat tárgyalja először a háromszögek egybevágóságát, ugyancsak erről szól még a 8. és a 26. feladat.

A 9. feladat a szög, a 10. pedig az egyenes felezése.

A 11. és 12. a merőleges emelése és bocsátása.

A 15. a csúcsszögek egyenlősége.

A 17. feladat: *Minden háromszög bármely két szöge együttvéve kisebb két derékszögnél.*

A 20. feladat: *Minden háromszög bármely két oldala együttvéve nagyobb a harmadiknál.*

A 27., 28., 29., 30. és 31. feladat a párhuzamos és az azokat metsző vonalakkal foglalkozik.

A háromszög egyik legfontosabb tétele a 32. feladat.

Minden háromszögben az egyik oldal meghosszabbíttatván, a külső szög egyenlő a másik két belső szöggel és a háromszög három belső szöge együttvéve két derékszöggel egyenlő.

Mint tudjuk, ezt a tételt már Pythagoras ismerte (IV. évf. 125. lap) és bizonyítását is tőle vette át Euklides.

A 33. és 34. feladat tárgya a parallelogramm. A 35. feladat ez:

Egyenlő alapokon álló és ugyanazon párhuzamosok közötti parallelogrammok egymással egyenlők.

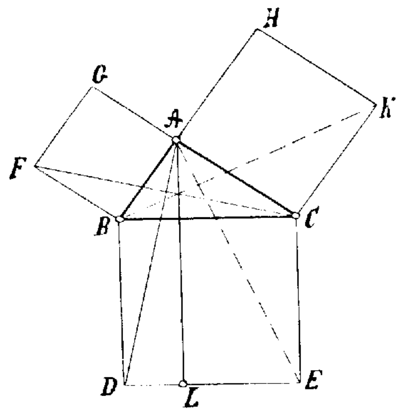
E feladat megnyitja a területszámítási feladatok sorát a négyszögekre és háromszögekre vonatkozólag. (36.-46.)

Az egész mű egyik legérdekesebb pontja végre a 47. feladat: a Pythagoras-féle tétel első bizonyítása, mely minden valószínűség szerint magától Euklidestől ered. A tételt kiváló mathematikai fontosságánál és történeti érdekességénél fogva teljességében közlöm.

A derékszögű háromszögekben az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzeteink összegével.

Legyen ABC derékszögű háromszög, melynek BAC szöge a derékszög: azt mondom, hogy a BC négyzete egyenlő a BA és AC négyzeteinek összegével.

Mert írjunk BC-re $BDEC$, BA-ra $BFGA$, AC-re pedig $AHKC$ négyzetet és vonjunk A-n keresztül akár BD-vel, akár CE-vel párhuzamos AL egyenest és húzzuk meg az AD és az FC egyeneseket.



Minthogy mind a BAC, mind a BAG szögek derékszögek, de e mellékszögeket a BA egyenes és az A pont különböző két oldalán fekvő AC meg AG egyenes teszi egyenlővé két derékszöggel: tehát CA és AG egy egyenesben fekszik. Ugyanezért BA és AH is egy egyenesben fekszik. És minthogy a DBC szög egyenlő az FBA szöggel, mivel mindkettő derékszög: adjuk hozzá mindegyikhez a közös ABC szöget; e szerint az egész DBA szög egyenlő az egész FBC szöggel. És mivel DB egyenlő BC-vel, FB pedig BA-val, ennélfogva a DB és BA oldalak külön-külön egyenlők a CB és BF oldalakkal és a DBA szög is egyenlő az FBC szöggel: tehát az AD oldal is egyenlő az FC oldallal és az ADB háromszög egyenlő az FBC háromszöggel; de a BL téglalap kétszer akkora, mint az ABD háromszög, mert közös BD alapjuk van és ugyanazon BD és AL párhuzamosok között vannak. $BFGA$ négyzet pedig szintén kétszer akkora, mint az FBC háromszög, mert közös BF alapjuk van és ugyanazon FB és GC párhuzamosok között vannak. Mivel pedig egyenlőknek kétszeresei egymással egyenlők: BL téglalap egyenlő FA négyzettel. Ha az AE és BK egyeneseket meghúzzuk, hasonlóképpen kimutathatjuk, hogy: CL téglalap egyenlő $AHKC$ négyzettel; az egész $BDCE$ négyzet tehát egyenlő a $BFGA$ és $AHKC$ négyzetekkel együttvéve. De $BDCE$ négyzet BC-re van rajzolva, $BFGA$ és $AHKC$ négyzetek pedig BA-ra és AC-re, tehát a BC oldal négyzete egyenlő a BA és AC oldalak négyzeteivel.

A derékszögű háromszögekben tehát az átfogó négyzete egyenlő a befogók négyzeteinek összegével, Q.E.D.

A 48. feladat végre az előbbi feladat megfordítása:

Ha a háromszög egyik oldalának négyzete egyenlő a másik két oldal négyzeteinek összegével, e két oldal derékszöget zár be.

Ezzel az I. könyv be van fejezve.

Baumgartner Alajos.