A

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=0$$

alakú egyenletek gyöktelenítés után a következő alakot nyerik:

$$-x^2-y^2-z^2+2xy+2yz+2zx=0,$$

mely egyenlet baloldala még a következő alakban írható: A

(1) $$(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(\sqrt{y}+\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z})$$

Ezek alapján az adott egyenlet alakja a gyöktelenítés után a következő lesz:

$$a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2+$$
$$2a^2\{-(q-r)^2+(r-p)^2+(p-q)^2\}+2b^2\{-(q-r)^2-(r-p)^2+(p-q)^2\}+$$
$$+2c^2(q-r)^2+(r-p)^2-(p-q)^2+$$
$$(p-q)^4+(q-r)^4+(r-p)^4-2(p-q)^2(q-r)^2-2(q-r)^2(r-p)^2-$$

(2) $$-2(r-p)^2(p-q)^2=0.$$

Az utolsó hat tag összege egyenlő zérussal, mert az (1) alatti kifejezés analógiájára négy tényezőből álló szorzat alakjában fejezhető ki, melynek első tényezője $\{(p-q)+(q-r)+(r-p)\}=0$.

Ha $a,\ b,\ c$-t egy háromszög három oldalának képzeljük, akkor a (2) alatti kifejezés hat első tagja $=-16t^2$-tel, hol t alatt a háromszög területét értem.

Végre a középső három tag összege a következőképpen írható:

$$4a^2(p-q)(p-r)+4b^2(q-r)(q-p)+4c^2(r-p)(r-q).$$

Ha végre az $\dfrac{a}{2t},\ \dfrac{b}{2t},\ \dfrac{c}{2t}$ kifejezések helyett az $\dfrac{1}{h_1},\ \dfrac{1}{h_2},\ \dfrac{1}{h_3}$ vagyis az $(a,\ b,\ c)$ háromszög három magasságának $(h_1,\ h_2,\ h_3)$ reciprok értékeit vezetjük be, a gyöktelenített egyenlet legegyszerűbb alakja lesz:

$$\frac{(p-q)(p-r)}{h_1^2}+\frac{(q-r)(q-p)}{h_2^2}+\frac{(r-p)(r-q)}{h_3^2}=1.$$

Arany Dániel.