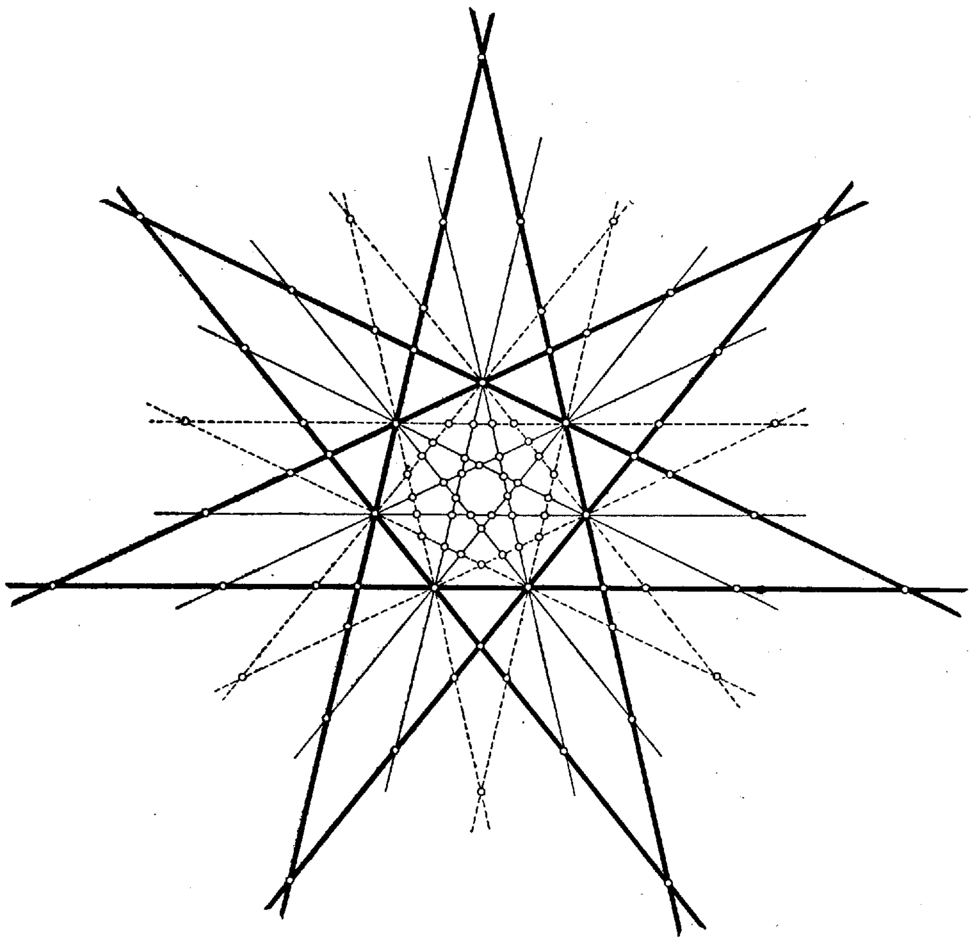
I. Tekintsük először a metszéspontok számának kérdését.

*a)* A $H$ hétszög mindegyik oldalegyenesét a többi 6 oldalegyenes mindegyike metszi (1. ábra, vastag), mert nincsenek köztük párhuzamosak, éspedig mindegyik más pontban. Ugyanis $H$ konvex, mindegyik oldalegyenesének az egyik partján fekszik, ezért a bármelyik két oldalegyenes által létrejött 4 szögtartomány közül csak egyben van pontja úgy, hogy ennek mindegyik szárán van csúcsa. Ha a szögtartomány csúcsán egy harmadik oldalegyenes is átmenne, ez kettévágná $H$-t, ami lehetetlen. – A metszéspontok összes száma $7 \cdot 6/2 = 21$, mert a $7 \cdot 6$ szorzatban minden metszéspontot 2-szer veszünk számba.



*1. ábra*

*b)* Kétféle átló van. Az egyik féle egy csúcsból a rá következő 2-ik csúcshoz vezet, merőleges a közbülső csúcson átmenő szimmetriatengelyre, és így párhuzamos az ezen csúccsal szemben fekvő oldallal (az ábrán szaggatva). A másik féle átló a kiindulási csúcsot a rá következő 3-ik csúccsal köti össze, párhuzamos a közbülső 2 csúcsot összekötő oldallal. Mindkét féle átlóból 7 van. A párhuzamosságok folytán a 14 átló- és 7 oldalegyenes 3-asával 7 irányt képvisel, bármelyik két irány közti szög a $180°/7 = \varepsilon$ szögnek egész számú többszöröse.

Mármost a 14 átló mindegyikét 12 másik metszi, éspedig $3-3$ átló $1-1$ csúcspontban, mert $H$ minden csúcsán 4 átló megy át, a többi 6 külön-külön. Eszerint $14 \cdot 6/2 = 42$ metszésponton $2-2$ átlóegyenes megy át, a 7 csúcsot hozzájuk véve az átlóegyenesek különböző metszéspontjainak száma 49.

*c)* A 21 oldal- és átlóegyenes mindegyikét 18 másik metszi, éspedig $5-5$ az illető egyenesen levő 2 csúcsban, mert $H$ minden csúcsán 6 egyenes megy át, a többi $18 - 2 \cdot 5 = 8$ külön-külön. Eszerint $21 \cdot 8/2 = 84$ metszésponton $2-2$ egyenes megy át, és a különböző metszéspontok száma $84 + 7 = 91$.

II. *a)* Három egyenes csak akkor nem határoz meg háromszöget, ha egy ponton mennek át, vagy ha van köztük párhuzamos. Az oldalegyenesek rendszerében ez egyetlen egyeneshármasra sem teljesül, bármely kiválasztott 3 oldalegyenes háromszöget ad. A háromszög oldalegyeneseinek megválasztásában lépésről lépésre haladva az a oldalegyenest $H$ oldalegyenesei közül 7-féleképpen választhatjuk, $b$-t a fennmaradtakból 6, végül $c$-t 5-féleképpen. Az így adódó $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ megválasztásban azonban minden háromszöget annyiszor veszünk tekintetbe, ahányféleképpen egymás utáni oldalegyeneseit megbetűzhetjük, vagyis 6-féleképpen:

$$a, b, c; \qquad a, c, b; \qquad b, a, c; \qquad b, c, a; \qquad c, a, b; \qquad c, b, a.$$

Eszerint a különböző háromszögek száma $210 : 6 = 35$.

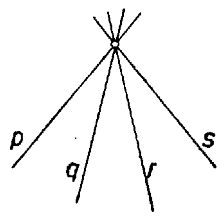
*b)* Az előző meggondolás mintájára az átlóegyenesek közül $a$-t 14-, $b$-t pedig $14-2=12$-féleképpen választhatjuk (mert az $a$-nak vett átlóval párhuzamos átlóval nem kapnánk háromszöget). Ha $a$ és $b$ nem $H$ valamely csúcsában metszik egymást – a $14 \cdot 12$ lehetőségből I. *b)* szerint $14 \cdot 6$ esetben –, akkor $c$ gyanánt a hátralevő $14-2 \cdot 2=10$ más irányú átló mindegyike vehető. A további $14 \cdot 6$ esetben $a$ és $b$ metszéspontján még 2 átló megy át, ezért $c$ választására csak $10-2=8$ lehetőség marad. Az így számba vett $14 \cdot 6 \cdot 10+14 \cdot 6 \cdot 8=1512$ háromszög ismét 6-onként csak oldalainak sorrendjében különböző, így a különbözők száma 252.

*c)* Mind a 21 egyenes közül $a$ és $b$ $21 \cdot 18$-féleképpen választható. Metszéspontjuk I. *c)* szerint $21 \cdot 8$ esetben nem csúcsa $H$-nak és $21 \cdot 10$ esetben csúcsa; ezért $c$ gyanánt $21-2 \cdot 3=15$, ill. $15-(6-2)=11$ egyenes választható, és a különböző háromszögek száma $(21 \cdot 8 \cdot 15+21 \cdot 10 \cdot 11)/6=805$.

III. Az egyenlő szárú háromszögek hasonló megszámlálása céljára megjegyezzük, hogy mivel szögeik $\varepsilon$ többszörösei, és összegük $180^\circ=7\varepsilon$, azért a főcsúcsukban levő szög $\varepsilon$-nak páratlan számú többszöröse. Így bármely két egyenesünk metszéspontja szerepelhet egyenlő szárú háromszög főcsúcsa gyanánt, mert az általuk bezárt 2-féle szög egyike páratlan többszöröse $\varepsilon$-nak, hiszen összegük páratlan többszöröse neki. Ha a két szár egyenesét megválasztottuk, akkor a köztük levő $2k\varepsilon$ alakú szög (a főcsúcsnál levő külső szög) felezője kijelöli az alap egyenesének irányát.

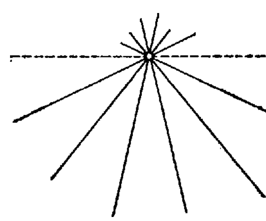
*a)* Az oldalegyenesek rendszeréből a két szárt a fentiekhez hasonlóan $7 \cdot 6/2=21$-féleképpen választhatjuk meg. Mivel minden metszésponton csak 2 oldalegyenes megy át, azért a szárakhoz a fentiek szerint meghatározott alap-irányt képviselő egyetlen egyenes nem megy át a szárak metszéspontján, így minden esetben 1 egyenlő szárú háromszöget kapunk. Összes számuk 21, éppen annyi, mint az oldalegyenesek metszéspontjainak száma. Valóban, az előzők szerint az oldalegyenesek minden metszéspontja 1 egyenlő szárú háromszögben szerepel főcsúcs gyanánt.

*b)* Az átlóegyenesek 42 olyan metszéspontját véve főcsúcs gyanánt, amelyen csak 2 egyenes megy át – amely tehát nem csúcsa $H$-nak, – minden esetben 2 egyenlő szárú háromszöget kapunk, mert a fentiek szerint meghatározott alapiránnyal 2 átló párhuzamos.



*2. ábra*

Ha pedig $H$ valamely csúcsát vesszük főcsúcsnak, a rajta átmenő 4 átlóegyenes közül a 2 szárat $4 \cdot 3/2=6$-féleképpen választhatjuk. Ezek közül 2 esetben a köztük levő $2k\varepsilon$ alakú szög felezője ugyancsak átlóegyenes, ugyanis a 2. ábrán $q$ felezi az $r$ és $p$ közti szöget, és $r$ az $s$ és $q$ közöttit; a többi 4 esetben ez nem áll fenn. E 4 esetben a 2 szár ugyancsak 2 átlóval alkot egyenlő szárú háromszöget. A 2 kiemelt esetben viszont $1-1$ háromszög elmarad. Így $H$ mindegyik csúcsa $4 \cdot 2+2 \cdot 1=10$ egyenlő szárú háromszögnek főcsúcsa. Az átlóegyenesekkel meghatározott egyenlő szárú háromszögek összes száma $42 \cdot 2+7 \cdot 10=154$.


*3. ábra*

*c)* Hasonlóan az átló és oldalegyeneseknek mind a 84 olyan metszéspontja, melyen csak 2 egyenes megy át, 3 egyenlő szárú háromszögnek főcsúcsa, mert a szárakkal meghatározott alap-iránnyal 3 egyenes párhuzamos. A $H$ bármelyik csúcsán átmenő 6 egyenes közül (3. ábra) a szárak $6 \cdot 5/2=15$-féleképpen választhatók. Az alap iránya majdnem minden esetben az illető csúcson átmenő egyenesek között is szerepel, csak abban a 3 esetben nem, amelyben a 2 szár az illető csúcsban hiányzó egyetlen irányra tükrös. Ebben a 3 esetben a 2 szár 3-féleképpen egészíthető ki egyenlő szárú háromszöggé, a többi 12 esetben csak 2-féleképpen. Mindezek szerint az átló- és oldalegyenesekkel meghatározott háromszögek közül az egyenlő szárúak száma: $84 \cdot 3+7(3 \cdot 3+12 \cdot 2)=483$.

IV. A 7 második féle átló $H$ belsejében egy kisebb $H_1$ szabályos hétszöget határol (1. ábra), ezen az első féle átlók nem mennek át, mert a középponttól távolabb vannak, mint a második féle átlók. $H_1$ mindegyik oldalához $1-1$ egyenlő szárú háromszög csatlakozik, ezek szomszédos párjai közé $1-1$ szimmetrikus ötszög (összesen 7), majd ezek közé $1-1$ deltoid illeszkedik, így az első féle átlókkal határolt $H_2$ szabályos hétszög területén $1+3 \cdot 7=22$ idom van. Egy első féle átlón kívül 5 háromszög van (a lemetszett csúcsból kiinduló 6 egyenes között); a szélsők azonban a szomszédos első féle átlókhoz is hozzátartoznak, így a $H$ és $H_2$ közötti idomok száma $7 \cdot 5-7=28$. Az összes idomok száma $22+28=50$.

*Knuth Előd* (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megszámlálásokra több más lehetőség is van. Pl. a II. *b)* és *c)* részben a háromszög oldalegyeneseinek *irányát* – a II. *a)* rész szerint – 35-féleképpen választhatjuk, ez után a *helyzetüket* $2-2$, ill. $3-3$-féleképpen, ezért $35 \cdot 2^3$, ill. $35 \cdot 3^3$ lehetőségre gondolunk. Így azonban egy ponton átmenő egyeneshármasokat is számításba vettünk. Ezek közös pontja mindig egy hétszögcsúcs. Egy csúcs 4 átlóegyenese közül a 3 egyenest 4-féleképpen, 6 összes egyenese közül pedig – a II. *a)* számláláshoz hasonló meggondolással – $6 \cdot 5 \cdot 4/6 = 20$-féleképpen választhatjuk. Ezért az elfajulás $7 \cdot 4$, ill. $7 \cdot 20$ esetben áll be, a valóságos háromszögek száma $35 \cdot 2^3 - 7 \cdot 4 = 252$, ill. $35 \cdot 3^3 - 7 \cdot 20 = 805$.

2. Érdekes, hogy az egyenlő szárú háromszögek száma az *a), b), c)* esetek mindegyikében több, mint fele az összes háromszögeknek (az *a)* és *c)* esetekben pontosan 60%-a).