1. Nevezzük u-t, v-t az $(u,\, v)$ számpár első, ill. 2-ik komponensének. Így a csillag művelet értelmezését így mondhatjuk ki: a rendezett I, II számpárra a csillag-műveletet alkalmazva az eredmény ismét számpár, első komponense I és II első komponensének szorzata, 2-ik komponense pedig összeg: az I-nek 2-ik és a II-nek első komponenséből képezett szorzatnak és II 2-ik komponensének összege. Az eredmény 2-ik komponense mutatja, hogy *a csillag-művelet nem kommutatív, általában*

$$(a,\, b)^*(a',\, b') \neq (a',\, b')^*(a,\, b).$$

A zárójelek, mint szokásos, *több művelet* előírása esetén a végrehajtás sorrendjét jelölik. Így (1) bal oldala

$$(aa',\, ba'+b')^*(a'',\, b'') = [aa'a'',\, (ba'+b')a''+b''],$$

a jobb oldal pedig

$$(a,\, b)^*(a'a'',\, b'a''+b'') = [aa'a'',\, ba'a''+(b'a''+b'')],$$

és ebből már látjuk, hogy a két oldal megfelelő komponensei egyenlők, tehát (1) helyes.

A bebizonyított állítás szerint a csillag-művelet asszociatív, vagyis ha csillag-művelet eredményével újabb csillagműveletet végzünk, a két csillagművelet végrehajtásának sorrendje felcserélhető (a számpárok sorrendje azonban nem!).

2. A kérdéses $(x,\, y)$ számpárra

$$(a,\, b)^*(x,\, y) = (ax,\, bx+y) = (a,\, b)$$

akkor és csak akkor teljesül, ha

$$ax = a \quad \text{és} \quad bx+y = b,$$

vagyis ha $x=1$ és $y=0$ (feltéve, hogy $a \neq 0$), tehát a keresett számpár: (1, 0.)

Azt kell belátnunk, hogy így (2) jobb oldalán is (a, b) áll. Valóban, az értelmezés szerint

$$(1,\, 0)^*(a,\, b) = (1\cdot a,\, 0\cdot a+b) = (a,\, b).$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

Kéry Gerzson (Sopron, Széchenyi I. g. III. o. t.)

Megjegyzések: 1. Az értelmezés szerint

$$(a,\, 0)^*(b,\, 0) = (ab,\, 0) \quad \text{és} \quad (1,\, a)^*(1,\, b) = (1,\, a+b).$$

A számpárokat a koordinátarendszer ugyanúgy jelölt pontjaival ábrázolva és első, 2-ik komponens helyett abszcisszát, ordinátát mondva e két eredményt így mondhatjuk ki: 1. Ha a csillagműveletet (1): az X-tengelyen ábrázolt számpárra alkalmazzuk, az eredmény képe is az X tengelyen van, abszcisszája a két számpár abszcisszáinak szorzata; (2): az $x=1$ egyenesen ábrázolt két számpárra alkalmazzuk, az eredmény képe is ugyanezen az egyenesen van, ordinátája a számpárok ordinátáinak összege. Az (1, 0) számpárra mindkét speciális eredmény érvényes.

Általánosabban kérdezhetjük, mikor van megoldása az $(a,\, b)^*(x,\, y) = (c,\, d)$ „egyenletnek”, és ha van, akkor hány van. Az

$$ax = c, \qquad bx+y = d$$

egyenletrendszerből $x = c/a$, $y = (ad-bc)/a$, hacsak a $a \neq 0$, ilyenkor a megoldás egyértelmű. $a=0$ esetén csak akkor van megoldás, ha egyszersmind $c=0$ is fennáll, ekkor bármely x megfelelő és hozzá y kiszámítható, tehát a megoldás nem egyértelmű.

Nagypál Botond (Orosháza, Táncsics M. g. IV. o. t.)

2. Mivel a feladatban értelmezett művelet nem kommutatív, az utóbbi kérdés természetes kiegészítése az $(x,\, y)^*(a,\, b) = (c,\, d)$ egyenlet felvetése. Innen $x = c/a$, $y = (d-b)/a$, ha $a \neq 0$; ha pedig $a=0$, akkor $c=0$ és $d=b$ egyidejű fennállása esetén bármely $(x,\, y)$ megoldás, máskor pedig nincs megoldás.