I. megoldás: 1. A számhármas–párok összege és négyzetösszege valóban egyenlő: az I. párban 414, ill. 84 932 és hasonlóan II: 90 621 és 4 549 468 547; III: 909 és 414 041; IV: 520 és 149 432. Majdnem mindegyik összeadásban feltűnik, hogy az összeadandókban egy- és kéttagú számjegyegyezések is vannak. Különösen szembeszökő ez a II. és III. párban, a közbülső 0-jegyek folytán. Vegyük észre, hogy az I. pár tagjai a 8, a 30 és $60 = 2\cdot 30$, a 100 és $2\cdot 100$ összeadandókból vannak felépítve, és 100, 30, 8 helyére rendre p, q, r-et téve így írhatók:

$$q+r,\quad p+r,\quad 2p+2q+r;\quad r,\quad p+2q+r,\quad 2p+q+r. \tag{1}$$

A hármasokon belüli cserékkel a II. számai is ilyen felépítésűek $p = 30\,000$, $q = 200$ és $r = 7$-tel. (1)-ben máris általános képleteket kaptunk tetszés szerinti p, q, r paraméterekből ilyen tulajdonságú számhármas–párok előállítására. Ugyanis az alapok összege mindkét oldalon $3p + 3q + 3r$, a négyzetek összege pedig $5(p^2 + q^2) + 3r^2 + 6r(p + q) + 8pq$.

2. A III. és IV. példák nem követik ezt a szabályszerűséget. Ha ugyanis a III. bármelyik hármasának számait bármelyik sorrendben egyenlővé tesszük (1) valamelyik hármasának kifejezéseivel, és ebből kiszámíthatjuk p, q, r értékét, majd ezekkel (1) másik hármasának számait – sohasem III. másik hármasának számait kapjuk. Pl.

$$q+r=4,\qquad p+r=500,\qquad 2p+2q+r=405\text{-ből}$$

$p = 299$, $q = -197$, $r = 201$, és ezekkel V. $r = 201$, $p+2q+r = 106$, $2p+q+r = 602$, ami egyik számban sem egyezik az 5, 400, 504 hármassal. Más példa:

$$r=504,\qquad p+2q+r=400,\qquad 2p+q+r=5\text{-ből}$$

$p = -298$, $q = 97$ és $r = 504$-gyel

VI.

$$q+r=601,\qquad p+r=206,\qquad 2p+2q+r=102.$$

Vegyük azonban észre, hogy a III. és IV. pár mindegyik hármasának 3-ik tagja egyenlő a másik hármas első két tagja összegével, vagyis a következő képletcsoporttal írhatók le:

$$s,\qquad t,\qquad u+v;\qquad u,\qquad v,\qquad s+t. \tag{2}$$

Itt a négyzetösszegek egyenlősége nyilván akkor és csak akkor áll fenn, ha (a paraméterek négyzetét mindjárt elhagyva) a kéttagúak négyzetéből adódó 2-szeres szorzatok egyenlők; egyszerűsítéssel:

$$uv = st,\qquad \text{vagyis pl}\qquad v = st/u. \tag{2a}$$

Eszerint lényegében itt is csak három paraméter van.

Mivel efféle vizsgálatokban természetes számokra szokás szorítkozni, azért célszerű a pozitív egész s, t számpár megválasztása után az st szorzat valamely osztóját venni u-nak, így v is egész, tehát (2) számhármasai egész számokból állnak, és összegeik, négyzetösszegeik egyenlők.

Krámli András (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

II. megoldás: Találhatunk olyan szabályszerűséget is, amely I–IV-et egyaránt jellemzi. Cseréljük fel I-ben és II-ben a két hármast és rendezzük mindegyik hármas tagjait növekvő sorrendbe:

I.	8,	168,	238;	38,	108,	268;	$x = 30$,	$y = 30$;
II.	7,	30 407,	60 207;	207,	30 007,	60 407;	200,	200;
III.	4,	405,	500;	5,	400,	504	1,	4;
IV.	6,	164,	350;	14,	150,	356.	8,	6.

Így mind a négy pár a következő általános alakban írható:

$$a,\qquad b+x+y,\qquad c;\qquad a+x,\qquad b,\qquad c+y, \tag{3}$$

ehhez x-et és y-t mindenütt feltüntettük. Az átrendezés alapja ez az észrevétel: mindegyik példa egyik hármasának legkisebb és legnagyobb tagja kisebb a másik hármas legkisebb, ill. legnagyobb tagjánál, és ezek a hiányok az alapok összegében a középső tagok révén egyenlítődnek ki.

Az I. megoldáshoz hasonlóan a négyzetösszegek egyenlőségéhez szükséges és elegendő a következő feltétel:

$$bx + by + xy = ax + cy. \tag{4}$$

Nyilvánvaló, hogy ennek – még egész számokban is – végtelen sok megoldása van. Ehhez pl. az átrendezett

$$a = b + y + (b - c)\cdot\frac{y}{x}$$

alak szerint tetszés szerinti (pozitív egész) b, c, y mellett elegendő, hogy x (pozitív) osztója legyen y-nak, pl. lehet $x = 1$.

Ha nem kötjük ki x és y pozitív voltát, akkor minden egyenlő összegű hármaspár írható a (3) alakban, és a négyzetösszeg egyenlőségének szükséges és elégséges feltétele (4).

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az első két pár szabályszerűségeihez a bizonyos számsorozatok vizsgálatában használatos „különbségek vizsgálatának módszereivel” is eljuthatunk. Vegyük észre, hogy I-ben $108-38=238-168$, valamint $268-108=168-8$ (és hasonló áll fenn II-ben is). Már most a számhármasokat a_1, b_1, c_1, ill. a_2, b_2, c_2-vel jelölve a

$$b_1-a_1=c_2-b_2=K$$
$$c_1-b_1=b_2-a_2=L$$
$$a_1+b_1+c_1=a_2+b_2+c_2=M$$

egyenletrendszerből, ahol K, L, M-et paraméternek tekintjük, – külön–külön az 1-es, ill. 2-es indexű ismeretlenekre –

$$(5)\qquad \begin{aligned} &a_1=(-2K-L+M)/3,\ b_1=(K-L+M)/3,\ c_1=(K+2L+M)/3;\\ &a_2=(-K-2L+M)/3,\ b_2=(-K+L+M)/3,\ c_2=(2K+L+M)/3.\end{aligned}$$

Ezekkel a négyzetösszeg mindkét hármasban $(6K^2+6L^2+3M^2+6KL)/9$-nek adódik, tehát a (5) képletrendszer megfelelő számhármas–párokat ad.

Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. III. o. t.)

2. III-ban viszont a hányadosok vizsgálata ad jó ötletet: a $b_1:a_2=500:5=100$ és $b_2:a_1=400:4=100$ arányok értéke egyenlő. (IV-ben hasonlóan két arány értékét 25-nek találjuk.) Ezzel tulajdonképpen más úton jutottunk el $(2a)$-ra. Ezekből adódik a (2)-höz hasonló, de mellékfeltételhez nem kötött

$$(6)\qquad kl,\qquad mn,\qquad kn+lm;\qquad lm,\qquad kn,\qquad kl+mn$$

megoldás (szimmetrikus alak elérése végett a_1-et és a_2-t szorzat alakban vettük fel, a fenti arányt pedig n/l-nek).

3. Ha III-ban 4 és 5 helyett 004-et, ill. 005-öt írunk, akkor az egyik hármas számait hátulról előre kiolvasva a másik hármas számait kapjuk. Az érdeklődő olvasókra hagyjuk annak az érdekességnek a megmagyarázását, hogy ez a többlet–tulajdonság a III. két hármasából képezett V. és VI. számhármasok egybekapcsolásával előálló párban is megvan.