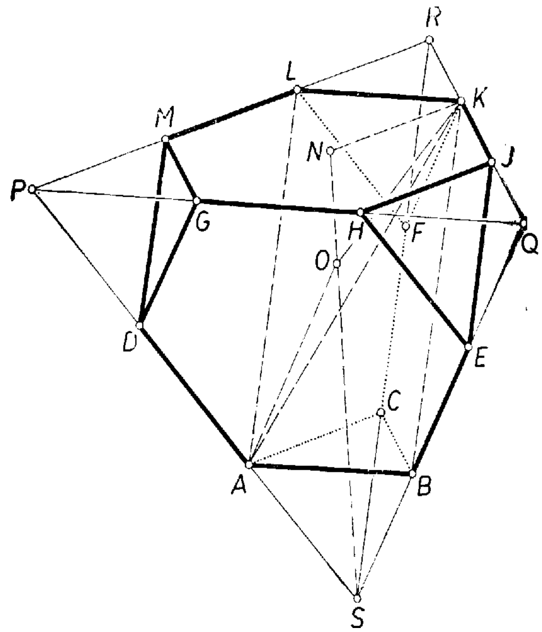
Legyenek a $PQRS = T$ szabályos tetraéder $3b$ hosszúságú éleit 3–3 egyenlő részre osztó pontok – a szóban forgó U konvex test csúcsai – az ábra szerint A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L, M.



Minden csúcsból a T szemben fekvő élét harmadoló csúcsokba lehet átlót húzni, így a 12 testátló a következő:

$$AJ,\ AK,\ BL,\ BM,\ CG,\ CH,\ DJ,\ DK,\ EL,\ EM,\ FG,\ FH.$$

Valamennyi átló egyenlő hosszú, mert alkalmas forgatással bármelyik csúcs átvihető bármelyik másik csúcs helyére úgy, hogy ugyanekkor minden csúcs valamely csúcs eredeti helyére kerül, és így bármelyik átló bármelyik másik helyére juttatható. Ugyanis T-t a testmagasságai körüli 120°-os forgatások önmagába viszik át, így bármelyik éle bármelyik másikba átvihető – szemközti, azaz közös végponttal nem bíró élek két ilyen forgatással –, továbbá két szemben fekvő él felezőpontjának összekötő egyenese körüli 180°-os forgatással ezen élek végpontjai felcserélhetők. E tulajdonságokat U örökli, mert csúcsait T valamennyi élén egyformán és az él középpontjára szimmetrikusan szerkesztettük.

Továbbá U-nak van középpontja, mert az előbbiek szerint minden csúcsa egyenlő távolságra van T-nek O középpontjától, tehát O az U-nak is középpontja. O a szabályosság folytán T-nek egyszersmind súlypontja is, és így a magasságszakaszoknak a lapokhoz közelebbi negyedelő pontjában an.[2] A testátlók egyenlő távolságra vannak O-tól, mert U körül O középponttal gömb írható, az átlók e gömbnek egyenlő hosszú húrjai, és egyenlő hosszú gömbi húrok egyenlő távol vannak a gömb középpontjától.

U-nak 18 éle és hatszöglapjainak $2b$ hosszúságú átlói – szám szerint $4 \cdot 3 = 12$ – ötösével párhuzamosak, közös irányuk T egy élének iránya; pl $AB \parallel DE \parallel GH \parallel MJ \parallel LK$. Ezért két nem egy lapban fekvő ilyen szakaszon átmenő sík trapézban, esetleg téglalapban metszi U-t. Minden átlón megy át ilyen síkmetszet. Az $ABKL = V_1$ és $DEJM = V_2$ négyszögek téglalapok, mert AL, ill. DM oldaluk párhuzamos RS-sel, és így merőleges PQ-ra.

1. Határozzuk meg pl. az AK testátló hosszát. V_1-ben $AB = b$ és $BK = 2b$, mert BK a BKQ szabályos háromszög egyik oldala, így Pythagorász-tételével $AK = b\sqrt{5}$.

2. Könnyen belátható, hogy T testmagassága $PQ\sqrt{2/3} = b\sqrt{6}$. Ezért – N-nel a PQR lap középpontját jelölve –, $ON = b\sqrt{6}/4$. Másrészt $NK = b$, ezért az OKN derékszögű háromszögből $OK = b\sqrt{22}/4$. Most már az AKO egyenlő szárú háromszögből O-nak AK-tól való távolságára $d = b\sqrt{2}/4$ adódik.

3. A testátlók metszéspontjainak számához elég ismét pl. az AK átlón létrejött metszéspontok számát megállapítani. Vegyük sorra AK mellett a többi átlókat. AJ és KD-nak közös végpontja van AK-val, ezt nem tekintjük metszésnek. A V_1 téglalapban BL a felezőpontjában metszi AK-t. – V_2 síkja párhuzamos V_1 síkjával és különböző attól, mert a PRS síkot az egymástól különböző DM, AL egyenesekben metszik. Így V_2 átlói: DJ és EM nem metszik AK-t. (Egyébként AK és DJ kitérők, mert V_1-nek $AB = b$ oldala párhuzamos V_2-nek $DE = 2b$ oldalával, és így a megfelelő átlók nem párhuzamosak; – ez azonban most lényegtelen.) – Tekintsük most az A-ba, majd a K-ba befutó éleken átmenő téglalap-, ill. trapézmetszetekben fekvő testátlókat. Az AB élen átmenő $ABJM$ trapézmetszet BM átlója nem metszi AK-t, mert a trapéznak az AK-t magában foglaló V_1-gyel való metszésvonala AB, és ezt BM nem A-ban metszi. Az AC-n átmenő $ACKG$ trapézban CG metszi AK-t éspedig az A-hoz közelebbi harmadoló pontjában, mert $AC : GK = 1 : 2$; viszont az $ACJH$-beli CH átló nem metszi AK-t. AD-n és KJ-n nem megy át ilyen metszet. Hasonlóan a $KFAH$ trapéz FH átlója a K-hoz közelebbi harmadolópontjában metszi, a $KFDG$-beli FG és a $KLDE$-beli KE pedig nem metszi AK-t. Ezzel valamennyi testátlót megvizsgáltuk: az AK testátlót a belsejében 3 másik átló metszi, mindegyik más-más pontban.

[2] L. *Molnár Ferenc:* A tetraéder nevezetes pontjairól. K. M. L. 16 (1958) 1–6. és 33–38. o., közelebbről 1. o.

Mivel mind a 12 átlón 3–3 metszéspont van, és minden metszéspont két átlóhoz tartozik hozzá, azért az átlók belső metszéspontjainak száma $12 \cdot 3/2 = 18$. Tágabb értelemben pedig, a csúcsokat is az átlók metszéspontjai közé számítva, az átlók közös pontjainak száma $18 + 12 = 30$.

Farkas Zoltán (Hódmezővásárhely, Bethlen G. g. II. o. t.)
Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)