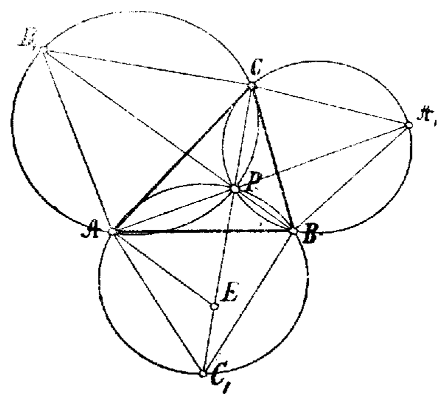
Ismeretes, hogy a háromszög magasságai, szögfelezői, középvonalai és az oldalak középpontjaiban emelt merőlegesek egy-egy pontban metszik egymást, mely pontokat a háromszög nevezetes pontjainak mondjuk.

E négy ponton kívül van még egy, melyet érdekes tulajdonságai miatt a *háromszög ötödik nevezetes pontjának* szoktak nevezni. E pontnak -melyet P-vel jelölünk- néhány nevezetesebb tulajdonságát a következőkben mutatjuk be.

1° E pontból a háromszög oldalai egyenlő szögek alatt látszanak, tehát $APC\sphericalangle = CPB\sphericalangle = BPA\sphericalangle$. Hogy P-t megszerkeszthessük, rajzoljunk az ABC háromszög oldalai fölé egyenlőoldalú háromszögeket; az ezen háromszögek csúcsain átmenő körök a keresett pontban metszik egymást.

Bizonyítás. AC_1BP és BA_1CP húrnégyszögek; $AC_1B\sphericalangle = BA_1C\sphericalangle = 30^\circ$ s így $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = 120^\circ$. Ennélfogva $APC\sphericalangle = 120^\circ$ s minthogy $AB_1C\sphericalangle = 60^\circ$, azért $APCB_1$ is húrnégyszög s így a harmadik kör is átmegy a P ponton.



2° Az AA_1, BB_1 és CC_1 egyenesek P pontban metszik egymást.

Bizonyítás. $ACA_1\triangle \cong BCB_1\triangle$; tehát $CB_1B\sphericalangle = CAA_1\sphericalangle$ s így CB_1AP húrnégyszög, melyben $APC\sphericalangle = 120^\circ$; hasonlóképp kimutathatjuk $APB\sphericalangle = BPC\sphericalangle = 120^\circ$. E tételt is felhasználhatjuk a P pont megszerkesztésére.

3° $AA_1 = BB_1 = CC_1$, mert $ACA_1\triangle \cong BCB_1\triangle$ és $ABA_1\triangle \cong CBC_1\triangle$.

4° $AA_1 = BB_1 = CC_1 = AP + BP + CP$.

Bizonyítás. Minthogy APC_1 és C_1PB egyenlő húrokhoz ($AC_1 = BC_1$) tartozó kerületi szögek, azért $APC_1\sphericalangle = C_1PB\sphericalangle = 60^\circ$. Ha P-ből PC_1-re rámérjük AP-t, úgy hogy $PE = AP$, akkor az APE háromszög egyenlőoldalú s így $AE = AP$; de $AC_1 = AB$ és $AEC_1\sphericalangle = APB\sphericalangle = 120^\circ$, tehát $AEC_1\triangle \cong APB\triangle$, miért is $EC_1 = PB$. Ennélfogva:

$$CC_1 = CP + PE + EC_1 = CP + AP + BP.$$

5° Az ABC háromszög síkjának összes pontjai közül a P pontnak a háromszög csúcsaitól való távolságainak összege a legkisebb. Ha tehát X az ABC síknak egy tetszés szerinti pontja, úgy

$$AP + BP + CP < AX + BX + CX.$$

E tételt *Riesz Frigyes*, lapunk munkatársa, következőképpen bizonyítja:

Az A, B, C pontokban az AP, BP és CP egyenesekre emelt merőlegesek az $A'B'C'$ szabályos háromszöget alkotják.

Jelöljük a tetszés szerint választott X pontnak $A'B'C'$ háromszög oldalaitól való távolságait x_a, x_b és x_c-vel.

Minthogy az $A'B'C'$ háromszög területe egyenlő a $B'X'C'$, $C'XA'$ és $A'XB'$ háromszögek területeinek összegével, azért

$$\frac{am}{2} = \frac{a}{2}(x_a + x_b + x_c),$$

ha az $A'B'C'$ háromszög alapja a, magassága m. Az egyenlet mindkét oldalát $\frac{a}{2}$-lel osztva, kapjuk hogy:

$$x_a + x_b + x_c = m = \text{állandó}$$

s így

$$AP + BP + CP = x_a + x_b + x_c = m.$$

Ha X az $A'B'C'$ háromszög kerületén belül fekszik, úgy

$$XA \geqq x_a,\ XB \geqq x_b,\ XC \geqq x_c$$

tehát

$$XA + XB + XC \geq x_a + x_b + x_c = AP + BP + CP.$$

Az $XA + XB + XC$ összeg minimuma tehát $AP + BP + CP$.

Ha X az $A'B'C'$ háromszög kerületén kívül fekszik, úgy mindig találunk az ABC háromszög belsejében oly X_1 pontot, melyre nézve

$$AX_1 + BX_1 + CX_1 < AX + BX + CX.$$

Legyen X', X pontnak tükörképe olyan oldalra, pl. BC-re, vonatkozólag, melytől távolsága negatív. (X távolsága BC-től positív, ha X pont a BC által két részre osztott síknak azon oldalán fekszik, melyen A; ellenkező esetben negatív.) Ekkor $BX' = BX,\ CX' = CX'$. Minthogy AXX' háromszög AD középvonala X' felé hajlik, azért $AX' < AX$, tehát

$$AX' + BX' + CX' < AX + BX + CX.$$

Ha X' nem esik a háromszög belsejébe, ujbóli vagy többszörös transformatió után mindig nyerhetünk olyan $X^{(k)}$ pontot, mely a háromszög belsejében fekszik s melyre nézve az

$$X^{(k)} + BX^{(k)} + CX^{(k)}$$

kifejezésnek k növekedésével való folytonos kisebbedésénél fogva:

$$AX^{(k)} + BX^{(k)} + CX^{(k)} < AX + BX + CX.$$

Minthogy pedig

$$AP + BP + CP < AX^{(k)} + BX^{(k)} + CX^{(k)},$$

egyszersmind

$$AP + BP + CP < AX + BX + CX,$$

hol X az ABC sík tetszés szerinti pontja. Hogy pedig X a térnek is tetszés szerinti pontja lehet, abból következik, hogy $AX_1 < AX,\ BX_1 < BX,\ CX_1 < CX$, ha X_1 vetülete X-nek az ABC síkra.