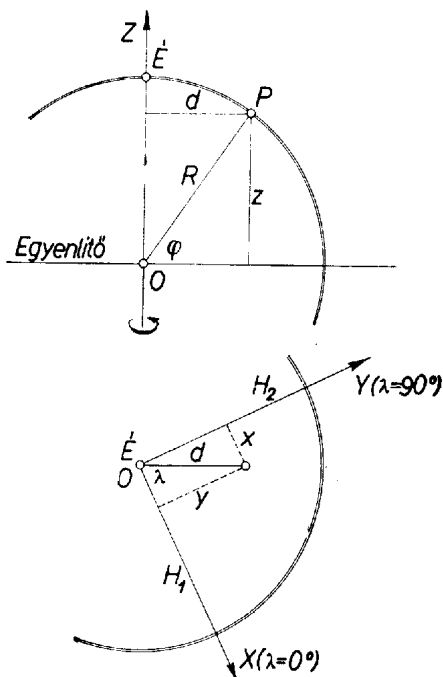


Megoldás: I. 1. A földfelszín egy P pontjának az Egyenlítő E síkjától, ill. a forgástengelytől való távolsága P hosszúsági körének síkjában az R sugárból és a φ szélességből $z = R \sin \varphi$, ill. $d = R \cos \varphi$ (1. ábra felső része).



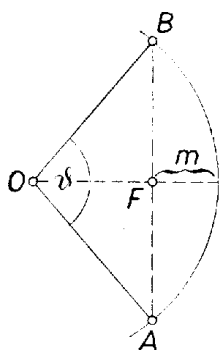
1. ábra

A Földet a szokásos állásban rajzolva és ennek megfelelően a déli szélességeket negatívnak véve z is előjellel értendő. B -re $z_1 = 4696$, $d_1 = 4304$; A -ra pedig $z_2 = 3233$, $d_2 = 5488$ (minden távolságot km-ben adunk meg, így sehol sem lépünk túl a 4-jegyű táblázatokkal elérhető pontosságon).

2. A 0° -os hosszúsági kör H_1 síkjától való távolság P szélességi körének síkjában az előbbi d -ből és a λ hosszúságból $y = d \sin \lambda$. (1. ábra alsó része). A nyugati hosszúságokat negatívnak véve, más szóval ha $-180^\circ < \lambda \leq 180^\circ$, y is előjellel adódik. Hasonlóan a $\pm 90^\circ$ -os délkörök H_2 síkjától való távolság $x = d \cos \lambda$. $-B$ -re $y_1 = 1408$, $x_1 = 4066$; A -ra $y_2 = -915$, $x_2 = 5411$.

(A pontokat így tulajdonképpen egy az ábrázoló geometriából ismert, térbeli derékszögű koordinátarendszerben adtuk meg, ennek origója a Föld O középpontja, X -, Y -tengelye az Egyenlítő $\lambda = 0^\circ$, ill. $\lambda = +90^\circ$ hosszúságú pontján lép ki (Accrától, ill. Kalkuttától délre), Z -tengelye pedig az Északi-sarkon).

3. Eredményeinkből megkaphatjuk annak a T téglatestnek az a , b , c éleit, amelynek két csúcsa A és B , lapsíkjai pedig átmennek ezeken és párhuzamosak E , H_1 , H_2 -vel; az élekből pedig folytatólag a húron mért $AB = h$ távolságot, ugyanis AB a T -nek testátlója. Éspedig $a = x_2 - x_1 = 1345$, $b = y_1 - y_2 = 2323$, $c = z_1 - z_2 = 1463$, és így $h = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3057$ km.



2. ábra

4. A Föld felszínén a legrövidebb AB ívet az ABO sík metszi ki. A metszet főkör (2. ábra), így sugara R . Legyen $\angle AOB = \vartheta$, ekkor az AOB háromszögből a koszinusz tétellel

$$\cos \vartheta = 1 - h^2/2R^2.$$

Innen $\vartheta = 27,78^\circ$, ívmértékben 0,4848, és így a felszínén mérve $AB = R\vartheta = 3088$ km.

5. Az AB húr legmélyebben, vagyis O -hoz legközelebb fekvő pontja az F felezőpont, mélysége $m = R(1 - \cos \vartheta/2) = 187$ km.

II. A kívánt általános képletet a fentiek alapján adjuk meg, a ϑ szög kiszámítására. Ebből az ív egyszerűen megkapható. T élének hossza – esetleg ellentett előjellel, ez azonban a további négyzetreemelésre tekintettel nem lényeges:

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 &= d_1 \cos \lambda_1 - d_2 \cos \lambda_2 = R(\cos \varphi_1 \cos \lambda_1 - \cos \varphi_2 \cos \lambda_2), \\y_1 - y_2 &= d_1 \sin \lambda_1 - d_2 \sin \lambda_2 = R(\cos \varphi_1 \sin \lambda_1 - \cos \varphi_2 \sin \lambda_2), \\z_1 - z_2 &= R(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2).\end{aligned}$$

Ezekkel, mindjárt átcsoportosítva, majd ismert trigonometrikus azonosságok felhasználásával

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 &= R^2 [\cos^2 \varphi_1 (\cos^2 \lambda_1 + \sin^2 \lambda_1) + \cos^2 \varphi_2 (\cos^2 \lambda_2 + \\&+ \sin^2 \lambda_2) - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2)] = \\&= R^2 [\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)],\end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned}h^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = R^2 [(\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1) + \\&+ (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2) - 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)] = \\&= 2R^2 [1 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2)],\end{aligned}$$

végül (1) alapján

$$\cos \vartheta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_1 - \lambda_2).$$

Innen ϑ egyértelműen kiszámítható – ugyanis nyilván $0 < \vartheta \leq 180^\circ$.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

Megjegyzés. Általános eredményünk a gömbi trigonometria ún. oldal–koszinusz tételének az $\vec{E}AB$ gömbháromszögre való alkalmazásával is megkapható, ahol \vec{E} az Északi–sark. Több dolgozat csak a végeredményre törekedve mindjárt ezt írta fel és ezt tekintette megoldásnak, ill. második megoldásnak. Itt a számpéldán felül annak beláttatása volt a cél, hogy a képlethez a gömbi trigonometria tételeinek rendszeres kiépítése nélkül is el lehet jutni.