Emeljük ki a kéttagú tényezőkből x együtthatóját:

$$2\cdot 3\cdot 6(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)=a, \tag{2}$$

és vegyük észre, hogy az első és a harmadik tényező összege egyenlő a második és a negyedik tényező összegével:

$$(x-1)+\left(x-\frac{4}{3}\right)=2x-\frac{7}{3}=\left(x-\frac{3}{2}\right)+\left(x-\frac{5}{6}\right).$$

Ennek alapján új ismeretlennek ezen összeg felét:

$$z=x-\frac{7}{6}$$

-ot véve feladatunkat megkönnyíthetjük. Ekkor $x=z+7/6$, és egyenletünk így alakul:

$$\left(z+\frac{1}{6}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)\left(z-\frac{1}{6}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)=\left(z^2-\frac{1}{36}\right)\left(z^2-\frac{1}{9}\right)=\frac{a}{36},$$
$$z^4-\frac{5}{36}z^2+\frac{1}{324}-\frac{a}{36}=0.$$

Innen z^2-re két értéket kapunk – hacsak a diszkrimináns pozitív –

$$z^2=\frac{5\pm\sqrt{9+144a}}{72},$$

ezekből pedig négyzetgyökvonással z-re két–két gyököt, hacsak z^2 értékei nem negatívok. Végül x-et a fenti helyettesítés alapján számíthatjuk ki.

Az első számpéldában $a=14$, $z^2=25/36$ és $z^2=-5/9$. Valós z-t csak az előbbiből kapunk: $z=\pm 5/6$, és így $x_1=2$, $x_2=1/3$.

$a=0{,}1$-ből (négy tizedes jegynyi pontossággal) $z^2\approx 0{,}1366$, és $z^2\approx 0{,}0022$, innen $z_{1,2}=\pm 0{,}370$ és $z_{3,4}=\pm 0{,}047$, végül $x_1=1{,}536$, $x_2=0{,}796$; $x_3=1{,}21$, $x_4\approx 1{,}12$. Négy valós gyököt kapunk.

Végül $a=-0{,}0544$-ből hasonlóan $z^2\approx 0{,}0844$, $0{,}0544$, $z\approx\pm 0{,}291$, $\pm 0{,}233$, végül $x_1\approx 1{,}458$, $x_2\approx 0{,}876$, $x_3\approx 1{,}4$, $x_4\approx 0{,}933=14/15$, mind a négy gyök valós.

Bornes Klára (Budapest, Teleki Blanka lg. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. A megoldás alapjául szolgáló észrevétel ugyanaz, mint az 1960. évi Arany Dániel verseny, haladók versenye döntő fordulójának 3. feladatában.[1] Ennek megfelelően az egyenlet a versenyfeladat II. megoldásában alkalmazott helyettesítéssel is megoldható.

2. Vizsgáljuk meg az (1)-ből beszorzással és 0-ra redukálással adódó

$$36x^4-168x^3+289x^2-217x+60-a=0$$

egyenletet a 656. feladatban[2] talált eredmény alapján. Ott azt nyertük, hogy az $x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ polinom akkor és csak akkor írható z^4+Az^2+B alakban, ha az együtthatókra teljesül $a^3-4ab+8c=0$; továbbá e feltétel teljesülése esetén a polinomot a második alakba az $x=z-a/4$ helyettesítés viszi át. Esetünkben a, b, c helyén rendre

$$-\frac{168}{36}=-\frac{14}{3},\quad \frac{289}{36},\quad -\frac{217}{36}$$

áll, ezekkel az idézett feltétel teljesül, helyettesítésnek pedig a fent is használt $x=z+7/6$ adódik.

Egyszerűbb lett volna a számítás, ha előbb az $x-1=w$ helyettesítést alkalmazzuk. Evvel a

$$w(2w-1)(3w-1)(6w+1)-a=36w^4-24w^3-w^2+w-a=0$$

egyenletre jutottunk volna, kisebb együtthatókkal. Ezt a (2) alak alapján abból lehet sejteni, hogy mind a négy tényezőben az állandó kivonandó értéke 1 körül van.

---

[1] L. a megoldást K. M. L. 22 (1961) 5. o.

[2] K. M. L. 11 (1955) 57. o.