Előzetes megjegyzés. Sok megoldó helyesen állapította meg, hogy a feladat nem kívánja *valamennyi* szóban forgó számhármas előállítását. Az alábbi megoldások különböző előállításmódokat ismertetnek.

I. megoldás: Olyan számhármasokat adunk meg, amelyek négyzetgyökeivel mint oldalhosszakkal szerkesztett háromszög derékszögű. Legyenek a befogók $\sqrt{a_1}$ és $\sqrt{a_2}$, ekkor Pythagorász tételével $a_3 = a_1 + a_2$, a t területre pedig $t = \sqrt{a_1} \cdot \sqrt{a_2}/2$, és így a $a_1 a_2 = 4t^2$. A két befogó egész, egymástól különböző, és nem teljes négyzet, ha pl. $a_1 = 2$, és így $a_2 = 2t^2$, ahol t 1-nél nagyobb, tetszés szerinti egész szám; mert így a_2-nek törzsszám-szorzat alakú előállításában 2 kitevője páratlan szám (hiszen t^2-ben 2 kitevője páros). Ezekből $a_3 = 2(t^2 + 1)$ is egész, a_1 és a_2-től különböző, és páros t esetén biztosan nem teljes négyzet, mert ekkor t^2 is páros, tehát a_3 egy páratlan szám 2-szeresével egyenlő. Végül a $t = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots$ értékekkel képezett

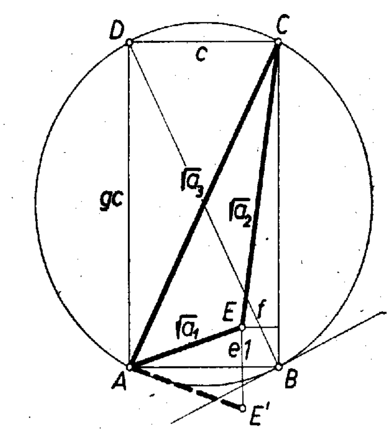
$$a_1 = 2, \qquad a_2 = 2t^2, \qquad a_3 = 2(t^2 + 1) \tag{1}$$

számhármasok közül bármely kettő lényegesen különböző, mert valamennyi számhármas az $a_1 = 2$ legkisebb tagban egyezik, a további két tagban pedig eltér egymástól.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Páratlan t-vel az a_3-ra adódó szám nem mindig teljesíti a 2. követelményt. Ugyanis $t = 2q + 1$-gyel $a_3 = 2[(2q+1)^2 + 1] = 4[q^2 + (q+1)^2]$, és ez pl. $q = 3,\ 20,\ 119,\ 696$ esetén teljes négyzet. A pythagorászi alap-számhármasokra ezen kötetünk 3. oldalának lábjegyzetében adott képletcsoport felhasználásával az 1009. feladat alapján végtelen sok ilyen q értéket lehet megadni.

II. megoldás: A 638. gyakorlatban látott elhelyezési bizonyítás megfordításával adunk megfelelő számhármasokat: tekintünk egy c, d egész oldalakkal bíró $ABCD$ téglalapot, ennek ABC részháromszögében egy az oldalaktól e, f egész mértékszámú távolságra levő E pontot, és a_1, a_2, a_3 gyanánt az AEC háromszög oldalainak négyzetét vesszük:



$$a_1 = AE^2 = (c-f)^2 + e^2, \quad a_2 = EC^2 = f^2 + (d-e)^2, \quad a_3 = CA^2 = c^2 + d^2.$$

Ezekkel a_1, a_2, a_3 egészek és teljesül a 3. követelmény első része. Ezután c, d, e, f értékének megválasztására szóló előírásokkal biztosítjuk a további követelmények teljesülését.

Az 1. teljesül, ha pl. $d > c \geq 2$ és $e = f = 1$, vagyis $a_1 = (c-1)^2 + 1$, $a_2 = (d-1)^2 + 1$; mert így $a_1 < a_2$, és mindkettő kisebb az AC átló négyzeténél, a_3-nál. Egyszersmind a_1 és a_2-re 2. is teljesül, mert pozitív egész szám négyzetét 1-gyel növelve nem kaphatunk négyzetszámot. Hasonlóan a_3 sem teljes négyzet, ha pl. $d = gc$, ahol g az 1-nél nagyobb egész szám, mert így $a_3 = c^2(1 + g^2)$, és itt $1 + g^2$ nem teljes négyzet. Végül az ACE háromszög t területe

$$t = t_{ABC} - t_{ABE} - t_{BCE} = \frac{cd}{2} - \frac{c}{2} - \frac{d}{2} = \frac{1}{2}[(c-1)(d-1) - 1] =$$
$$= \frac{1}{2}[(c-1)(gc-1) - 1],$$

és ennek egész voltához szükséges és elegendő, hogy $c - 1$ és $gc - 1$ páratlan legyen, vagyis, hogy c páros legyen.

Most már állandó g-vel és $c = 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$ mellett a

$$a_1 = (c-1)^2 + 1, \qquad a_2 = (gc-1)^2 + 1, \qquad a_3 = (1+g^2)c^2 \tag{2}$$

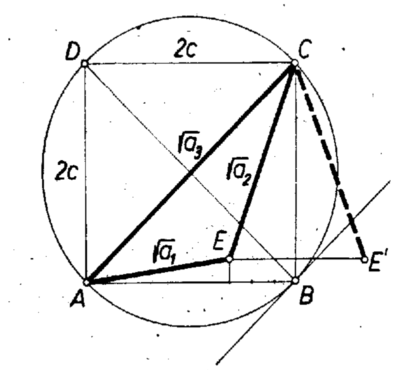
képlethármas tetszés szerinti számú, a feltételeknek megfelelő számhármast ad. Ezek egymástól lényegesen különbözők, mert $a_1 < a_2 < a_3$ folytán a c-től különböző c' értékhez tartozó a_1', a_2', a_3' számhármas csak akkor volna szorzással előállítható a_1, a_2, a_3,-ból, ha állna $a_3' : a_3 = a_2' : a_2$, márpedig az innen adódó $a_3' a_2 - a_3 a_2' = 0$-ból behelyettesítéssel és rendezéssel

$$(c - c')[(g-1)cc' + (c-1)(c'-1) - 1]$$

ez pedig lehetetlen, mert egyik tényező sem 0 (a második biztosan pozitív).

Sólyom István (Budapest, Vörösmarty M. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Négyzetből kiindulva is kaphatunk megoldást, ha ennek oldala $2c$ (>4) és E-t az oldalaktól 1, ill. 3 egységnyi távolságban vesszük.



Ekkor

$$a_1 = (2c-3)^2 + 1, \quad a_2 = (2c-1)^2 + 9, \quad a_3 = 8c^2. \tag{3}$$

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

2. A (2) és (3) számhármasokhoz tartozó háromszögek mindegyike E-nél tompaszögű, mert E benne van az ABC háromszögben, tehát az AC átmérő fölött k Thalész-körben is. Ha azonban E-t (2) esetén az AB, (3) esetén a BC-re való E' tükörképével cseréljük ki, akkor az ACE' háromszög hegyesszögű, mert E' a k-hoz B-ben húzott érintőnek k-val ellentétes oldalán van. E cserékkel

$$a_1 = (c-1)^2 + 1, \quad a_2 = (gc+1)^2 + 1, \quad a_3 = (1+g^2)c^2; \tag{2'}$$

$$a_1 = (2c+3)^2 + 1, \quad a_2 = (2c-1)^2 + 9, \quad a_3 = 8c^2. \tag{3'}$$

E számhármasok tagjai is különbözők, (2')-ben $a_2 \lesseqgtr a_3$ (3')-ban $a_1 \lesseqgtr a_3$, mert az $a_2 = a_3$, ill. $a_1 = a_3$ egyenlőség feltevése c-re a $c^2 - 2gc - 2 = 0$, ill. $2c^2 - 6c - 5 = 0$ egyenletre vezet, diszkriminánsuk $4(g^2+2)$, ill. 76, nem teljes négyzet, tehát így c nem lehetne racionális.