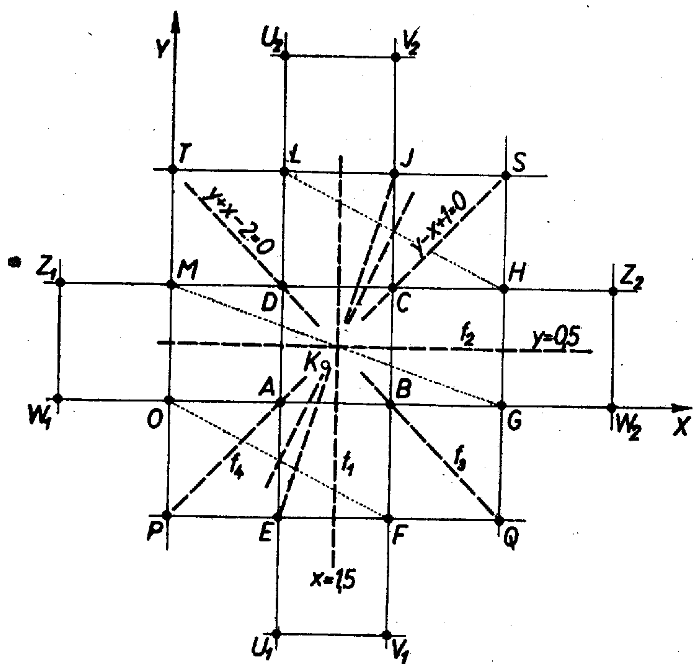
I. megoldás: 1. A 971. feladatban[1] bebizonyítottuk, hogy a $K(\sqrt{2},\ 1/3)$ pont körül írt bármely körön legfeljebb egy rácspont van, más szóval, hogy nincs két olyan rácspont, amely K-tól egyenlő távol volna. A 971. feladat állítása és bizonyítása érvényes minden olyan K pontra, melynek egyik koordinátája irracionális, a másik pedig olyan racionális szám, melynek tovább nem egyszerűsíthető alakjában a nevező legalább 3. Mi a további meggondolásokat a fenti K pontra fogjuk alkalmazni.

A sík rácspontjainak K-tól mért távolságai úgy rendezhetők nagyság szerint növekvő sorozatba, hogy a sorozat bármely két tagja különböző. Jelöljük az n-edik távolságot a sorozatban r_n-nel. Ha K körül olyan r sugárral írunk k kört, amelyre $r_n < r \leq r_{n+1}$, akkor k belsejében pontosan n rácspont van, mindazok, amelyeknek K-tól mért távolsága $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n$. Minden más rácspont vagy k-n kívül, vagy k kerületén van (ha $r = r_{n+1}$).



1. ábra

2. Alkalmazzuk a fentieket $K(\sqrt{2},\ 1/3)$ és $n = 10$ mellett. Előkészítésül tekintsük K távolságát a K-t magába foglaló $ABCD = N_1$ egységnyi rácsnégyzet csúcsaitól (1. ábra), e négyzet oldalai az $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ és $y = 1$ egyenesek. A távolságok nagyságviszonyát megállapíthatjuk kiszámításuk nélkül is. Éspedig $KA < KB$ és $KD < KC$, mert K az AB és DC szakaszok közös f_1 felező merőlegesének, vagyis az $x = 1{,}5$ egyenesnek azon az oldalán van, mint A és D, ugyanis K abszcisszájára $\sqrt{2} < 1{,}5$. Hasonlóan AD-nek f_2 felező merőlegese alapján $KA < KD$ és $KB < KC$, továbbá BD-nek f_4 felező merőlegese alapján $KB < KD$, ugyanis f_4 egyenlete: $y - x + 1 = 0$, és itt a bal oldal K-ra a B-vel egyenlő jelű: $4/3 - \sqrt{2} < 0$ és $-1 < 0$, másrészt ellentett jelű, mint D-re: $1 > 0$. Ezek szerint $KA < KB < KD < KC$.

Áttérve az N_1-et magábafoglaló $PQST = N_2$ rácsnégyzet csúcsaiban és oldalszakaszain fekvő rácspontokra, egyrészt az előzőkhöz hasonlóan $KP < KQ < KT < KS$, – másrészt az AC szakasz f_3 felező merőlegesét $(y + x - 2 = 0)$ is felhasználva – rendre f_1, f_3, f_2 és f_4 alapján $KE < KF < KG < KH < KJ$, továbbá f_4, f_2, f_3 és f_1 alapján $KE < KO < KM < KL < KJ$. Eszerint az $EFGHJLMO = N_3$ nyolcszög csúcsai közül E van K-hoz legközelebb, J legtávolabb.

Nyilvánvaló, hogy az N_3 csúcsaitól egységnyi távolságra levő, az N_1 és N_2 csúcsaitól különböző $U_1,\ V_1,\ W_2,\ \ldots,\ Z_1,\ W_1$ rácspontok vizsgálata után minden más rácsponttól eltekinthetünk, mert K-tól távolabb vannak, mint a már figyelembe vettek. E 8 pont közül az eddigiekhez hasonlóan U_1 van legközelebb K-hoz, de PU_1 felező merőlegese $(y - x + 2 = 0)$ alapján $KU_1 > KP$.

Mármost EC felező merőlegese $(2y + x - 1{,}5 = 0)$ alapján $KC < KE$ és PJ felező merőlegese $(3y + 2x - 3{,}5 = 0)$ alapján $KJ < KP$, tehát a K-hoz legközelebbi 4 rácspont N_1 négy csúcsa, a következő 8 pedig N_3 nyolc csúcsa, továbbá $r_{12} = KJ$. Mivel még f_1, alapján $KM < KH$, azért KL és KH kisebbike adja r_{10}-et, nagyobbika r_{11}-et. LH felező merőlegese $(y - 2x + 2{,}5 = 0)$ alapján $KL < KH$, tehát L-nek a keresett körben kell lennie, H-nak pedig rajta kívül, vagy a kerületén. Így a keresett kör sugarára

$$KL = r_{10} = \frac{1}{3}\sqrt{52 - 18\sqrt{2}} < r \leq \frac{1}{3}\sqrt{103 - 54\sqrt{2}} = r_{11} = KH,$$

azaz közelítőleg $1{,}717 < r < 1{,}721$.

[1] Lásd K. M. L. 20 (1960) 24. o.

Gálfi László (Budapest, Fazekas M. gyak. g. II. o. t.)
Kóta József (Tatabánya, Árpád g. II. o. t.) és
Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VII. o. t.)

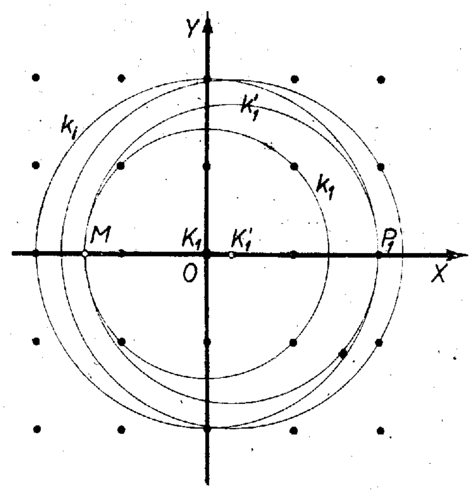
II. megoldás: 1. Az állítást (a 971. feladat eredményére nem támaszkodva) a teljes indukció módszerével bizonyítjuk. Az origó körül $r = 1/2$ (vagy bármely $0 < r < 1$) sugárral írt kör belsejében pontosan egy rácspont van, maga a kezdőpont. A $K(1/2,\, 0)$, körül $r = 1$ (vagy bármely $1/2 < r \le \sqrt{5}/2)$ sugárral írt kör belsejében pontosan két rácspont van: az origó és az $(1,\, 0)$ pont; tehát az állítás $n = 1$ és $n = 2$-re igaz.

Feltesszük, hogy van olyan K_1 pont és ehhez olyan r, sugár, hogy a K_1, körül r_1 sugárral írt k_1 kör belsejében pontosan $n-1$ (≥ 1) rácspont van, és megmutatjuk, hogy ekkor van olyan kör, melynek belsejében pontosan n rácspont van.

Tekintsük azon rácspontok k_1-től való d távolságát, amelyek nincsenek k_1 belsejében (d-t a P pontra nyilvánvalóan a K_1P szakasznak k_1-en kívül eső $K_1P - r_1$ szakasza adja meg). E távolságok között nyilván vagy egy, vagy több legkisebb van (vagyis olyan, amelynél nincs kisebb).

a) Ha csak egy d_1 legkisebb távolság van, és ez a P ponthoz tartozik, akkor ezt figyelmen kívül hagyva ismét van olyan távolság, amelynél nincs kisebb, legyen ez d_2. Ekkor a K_1 körül $r_1 + d_2$ sugárral írt kör belsejében benne van a korábbi $n - 1$ rácspont és P, azaz pontosan n rácspont. Ezt akartuk bizonyítani.

b) Ha több olyan távolság van, amelynél nincs kisebb, és ezek a $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_i$ rácspontokhoz tartoznak, akkor e pontok vagy a k_1-en kívül vannak, egy a k_1-gyel koncentrikus k_i kör kerületén, vagy a k_1 kerületén. Az utóbbi esetben k_1 helyett kijelölhetünk olyan vele koncentrikus és kisebb sugarú k_1^* kört, mely a k_1-beli $n - 1$ rácspontot ugyancsak a belsejében tartalmazza, és amelynek a kerületén egyetlen rácspont sincs. Vegyük evégett a k_1 belsejében levő rácspontok közül a K_1-től legtávolabbit, vagy ha több ilyen van, akkor bármelyiküket, legyen az Q, és ekkor k_1^* gyanánt nyilvánvalóan megfelel az $(r_1 + K_1Q)/2$ sugarú kör. Eszerint elegendő arra az esetre végeznünk a bizonyítást, ha a $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_i$ pontok nincsenek k_1 kerületén.



2. ábra

Ezt az esetet k_1 helyett egy alkalmas k_1' kör, kijelölésével visszavezethetjük az *a)* esetre. Legyen k_1 és a P_1K_1 egyenes P_1-től távolabbi metszéspontja M, ekkor k_1' a P_1M átmérőjű kör. Ez valóban megfelel az *a)* eset feltételeinek, mert 1) magában foglalja k_1-et és az annak belsejében levő $n - 1$ rácspontot; 2) további rácspontot nem tartalmaz, mert benne fekszik k_i-ben, márpedig k_i belsejében nincs más rácspont, mint a k_1-beliek; végül 3) k_i-vel egyetlen közös pontja P_1, tehát P_1 kisebb távolságra van k_1'-től, mint $P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_i$ bármelyike.

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

2. Az előírt K és r megadásában a fentiektől kissé eltérünk: kiindulási k_1 körünk belsejében és a kerületén együttvéve $10 - 1 = 9$ rácspont lesz; látni fogjuk azonban, hegy ez az eltérés a továbbiakban nem lényeges. – Legyen k_1 az origó körüli $\sqrt{2}$ sugarú kör. Ebben benne vannak a $(0,\, 0)$, $(\pm 1,\, 0)$ és $(0,\, \pm 1)$ pontok és a kerülelén a $(\pm 1,\, \pm 1)$ pontok. Itt a fenti *b)* esettel állunk szemben, k_1-höz legközelebb a $(2,\, 0)$, $(0,\, 2)$, $(-2,\, 0)$ és $(0,\, -2)$ pontok vannak. Vegyük P_1-nek $(2,\, 0)$-t, ekkor a fenti M pont: $(-\sqrt{2},\, 0)$, k_1' középpontja $K_1'\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, sugara pedig $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Egyszerű számítás mutatja, hogy k_1'-höz kívülről legközelebb a $(2,\, \pm 1)$ pontok vannak, ezek alapján a feladat 2. részének egy megoldása a

$$K_1'\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ pont és } 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} < r \le \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1}.$$

A k_1-en és a kerületén levő 9 rácspont a k_1' belsejében van, mert k_1 és k_1' egyetlen közös pontja M, és ez nem rácspont. Egyébként a megadott korlátok közti r-rel körünk k_1'-t is magában foglalja.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.) és
Biborka Tamás (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Nem kell azt gondolnunk, hogy racionális koordinátákkal bíró pont nem felelhet meg K gyanánt. Tekintsük az origó körüli 2 egységnyi sugarú kört, ennek belsejében 9, a kerületén 4 rácspont van, és toljuk el a középpontját a (0, 1/4) pontba. Így 3 kerületi rácspont külső ponttá, 1 pedig belsővé válik, megoldást kaptunk; itt $49 < 16r^2 \leq 65$.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

2. Hasonlóan K (1/3, 0) és $25 < 9r^2 \leq 34$ is megoldás.

Nagypál Botond (Orosháza, Táncsics M. g. III. o. t.)

3. Néhány érdekes eredmény a dolgozatok számpéldáiból: Az r korlátai közti különbség az I. megoldásban a legkisebb, – legnagyobb viszont a 2. megjegyzésben. – A két korláttal szerkesztett „üres” körgyűrű területe 3 megoldásban is π, éspedig a II. megoldásban és a két megjegyzésben; ennél nagyobb területű körgyűrű nem fordult elő. – r alsó korlátjára a legkisebb előfordult érték: K (1/2, 1/3) mellett *Máté Zsolt*nál: $97 < 36r^2$. (Még kisebb alsó korlát is adható volna az egységnyi rácsnégyzet középpontjához közel választott K-val.) – A felső korlát legnagyobb előfordult értéke az 1. megjegyzésbeli eredményhez tartozik.

4. Nem nehéz belátni, hogy növekvő n esetén a belsejükben pontosan n rácspontot tartalmazó különböző körök sugara egyre szűkebb korlátok közé szorul és közelítőleg az n/π hányados négyzetgyökével egyenlő.