I. megoldás: A PF_1F_2 háromszög F_1F_2 oldala állandó – a szokásos jelöléssel $2c$ –, PF_1 és PF_2 pedig a P pont két vezérsugara: r_1, r_2, amelyekre $r_1+r_2=2a$. Így a háromszög kerülete $2(a+c)$, tehát a félszög tangensének az oldalakkal való kifejezéseivel

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\sqrt{\frac{(a+c-2c)(a+c-r_1)}{(a+c)(a+c-r_2)}},\quad \operatorname{tg}\varphi_2=\sqrt{\frac{(a+c-2c)(a+c-r_2)}{(a+c)(a+c-r_1)}},$$

így pedig szorzatuk

$$\operatorname{tg}\varphi_1\cdot\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{a-c}{a+c},\quad \text{állandó.}$$

Csizy László (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

II. megoldás: Tekintsük adottnak az ellipszist az

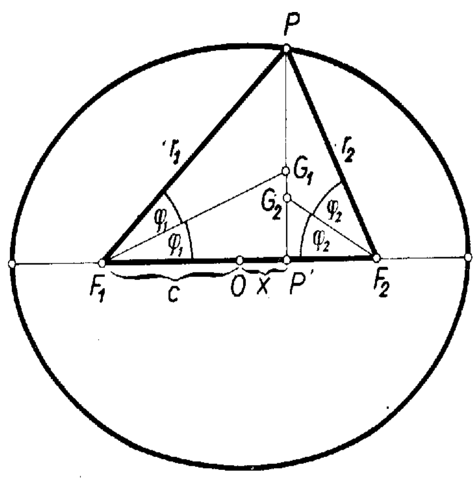
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

egyenlettel, ahol az $a^2>b^2$. Így a fókuszok koordinátái: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, ahol

$$c=\sqrt{a^2-b^2}. \tag{2}$$

Az ellipszis szimmetriája alapján elég az állítást az olyan $P(x,y)$ pontra belátnunk, melynek egyik koordinátája sem negatív: $x\ge 0$ és $y>0$ ($y=0$ lehetőségét a feladat kizárta).

Legyen P két vezérsugara $PF_1=r_1$ és $PF_2=r_2$, P vetülete az X-tengelyre P', és messe a $2\varphi_1$, $2\varphi_2$ szög felezője PP'-t G_1, G_2-ben.



Ekkor

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{P'G_1}{F_1P'}=\frac{P'G_1}{c+x}, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{P'G_2}{F_2P'}=\frac{P'G_2}{c-x}. \tag{4}$$

Alkalmazzuk a szögfelező osztási arányára vonatkozó tételt az $F_1P'P$ és $F_2P'P$ háromszögre:

$$\frac{G_1P}{P'G_1}=\frac{F_1P}{F_1P'}\quad\text{és}\quad\frac{G_2P}{P'G_2}=\frac{F_2P}{F_2P'},$$

azaz

$$\frac{y-P'G_1}{P'G_1}=\frac{r_1}{c+x}\quad\text{és}\quad\frac{y-P'G_2}{P'G_2}=\frac{r_2}{c-x}.$$

Mindkét oldalhoz 1-et adva, majd a két tört egyenlőségének formájában írt aránypár belső tagjait felcserélve, végül (3)-at, (4)-et figyelembe véve

$$\frac{y}{P'G_1}=\frac{c+x+r_1}{c+x}\quad\text{és}\quad\frac{y}{P'G_2}=\frac{c-x+r_2}{c-x},$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y}{c+x+r_1}, \tag{5}$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{y}{c-x+r_2}. \tag{6}$$

A $PP'F_1$ derékszögű háromszögből (1) és (2) figyelembevételével

$$r_1^2 = (c+x)^2 + y^2 = (a^2 - b^2) + 2cx + x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2}\right) = a^2 + 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2},$$

és így (mivel $x \geq 0$)

$$r_1 = a + \frac{cx}{a}.$$

Hasonlóan a $PP'F_2$ háromszögből ($0 \leq x < a$ és $c < a$ folytán)

$$r_2 = a - \frac{cx}{a}.$$

Ezekkel (5) és (6) nevezője így írható:

$$c + x + r_1 = c + x + a + \frac{cx}{a} = a + c + \frac{x}{a}(a+c) = (a+c)\left(1 + \frac{x}{a}\right),$$
$$c - x + r_2 = c - x + a - \frac{cx}{a} = (a+c)\left(1 - \frac{x}{a}\right),$$

tehát a kérdéses szorzat

$$\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{y}{(a+c)\left(1+\dfrac{x}{a}\right)} \cdot \frac{y}{(a+c)\left(1-\dfrac{x}{a}\right)} = \frac{y^2}{(a+c)^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)} =$$
$$= \frac{y^2}{(a+c)^2\dfrac{y^2}{b^2}} = \frac{b^2}{(a+c)^2} = \frac{a^2-c^2}{(a+c)^2} = \frac{a-c}{a+c}, \quad \text{állandó.}$$

Ezt kellett bizonyítanunk.

Meggondolásunk $x > c$ esetén is érvényes, hacsak $P'G_2$-t előjellel együtt értjük. Így $2\varphi_2 > 90^\circ$ és F_2G_2 az $F_2P'P$ háromszögben külső szögfelező, azonban a felhasznált tétel a külső szögfelezőre is érvényes.

Nem érvényes viszont vizsgálatunk az $x = c$ esetre, mert ekkor $P' \equiv F_2$ és az $F_2P'P$ háromszög nem létezik. Ekkor $\operatorname{tg}\varphi_1$ értéke éppen a fent nyert állandó:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{y}{(a+c)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)} = \frac{\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}}{\dfrac{(a+c)^2}{a}} = \frac{b^2}{(a+c)^2},$$

másrészt $2\varphi_2 = 90^\circ$, ezért $\operatorname{tg}\varphi_2 = 1$, tehát a szorzat értéke ugyanannyi, mint minden más esetben.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Az állítás nem terjeszthető ki arra az esetre, ha P a nagytengely valamelyik végpontjában van, mert ekkor a PF_1F_2 háromszög úgy fajul el, hogy φ_1 és φ_2 egyike 90°, és ezért a szorzatnak nincs értelme. – Nincs értelme az állításnak körre sem, mert ott F_1 és F_2 egybeesnek, φ_1, φ_2 határozatlanok.