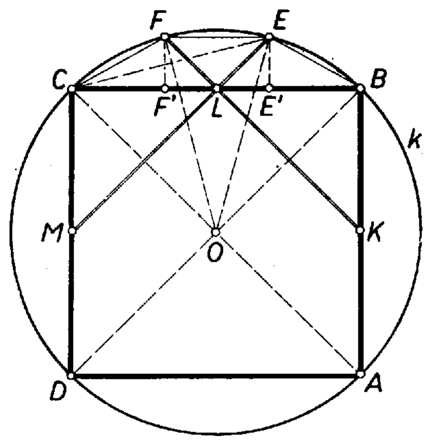
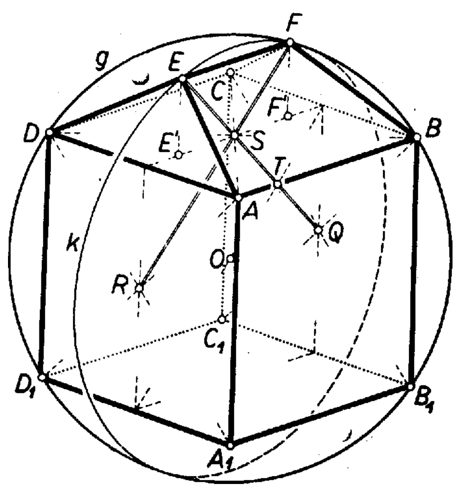
I. megoldás: 1. Legyen az O középpontú k körbe írt négyzet $ABCD$ (1. ábra), az AB, BC, CD oldal felező pontja rendre K, L, M, és az M-ből és K-ból L-en át húzott félegyenes messe k-t E, ill. F-ben.



1. ábra

Így ML a DBC háromszög középvonala, párhuzamos a DB átmérővel és merőlegesen felezi az OC sugarat. Ezért $EC = EO = CO$, az OCE háromszög egyenlő oldalú, és $COE\sphericalangle = 60^\circ$, tehát $BOE\sphericalangle = 30^\circ$. Hasonlóan $BOF\sphericalangle = 60^\circ$, $COF\sphericalangle = 30^\circ$, és így $EOF\sphericalangle = EOC\sphericalangle - FOC\sphericalangle = 30^\circ = 360^\circ/12$. Eszerint az E, F pontok k-nak BC negyedívét három egyenlő részre osztják; ezzel az első állítást bebizonyítottuk.

2. Legyen az O középpontú g gömbbe írt $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kocka (3. ábra) BCC_1B_1, ADD_1A_1 és $ABCD$ lapjának középpontja rendre Q, R, S, és messe a Q-ból, ill. R-ből S-en át húzott félegyenes g-t E, ill. F-ben.



3. ábra

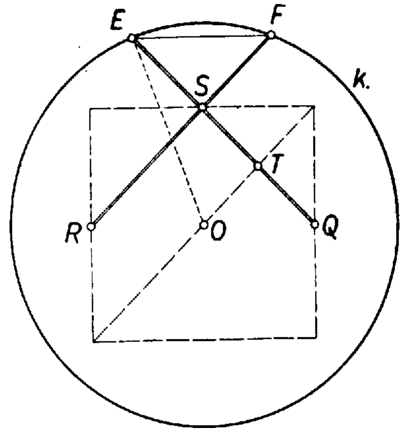
Megmutatjuk, hogy az A, B, C, D, E, F csúcsokkal meghatározott konvex P^* poliéder hasonló az 1958. évi Orsz. Középisk. Matematikai Tanulmányi Verseny II. fordulója 3. feladatában leírt[1] és folytatólag a 951. feladatban[2] vizsgált P poliéderhez. Ebből már következik az állítás, ugyanis az utóbbi feladatban (a III. megoldásban) bebizonyítottuk, hogy 1) P-t négyzetlapjánál fogva egy a élű kocka egy lapjára (kifelé) ráillesztve a négyzetlapjához nem tartozó 2 csúcsa ráesik a kocka köré írt gömbre, továbbá hogy 2) P-nek 6 példányát a kocka 1–1 lapjára alkalmas állásban hasonlóan ráillesztve szabályos dodekaédert kapunk. E dodekaéder körülírt gömbje 1) szerint nyilván azonos a kocka körülírt gömbjével. – Az 1) tényt így is kimondhatjuk: P bele van írva abba a gömbszeletbe, amelyet az a élű kocka köré írt gömbből a kocka egy lapsíkja lemetsz.

Mármost P^*-ot ugyancsak a vizsgált kocka köré írt g-ből az $ABCD$ lapsíkkal lemetszett gömbszeletben szerkesztettük, E és F csúcsai a BC él felező merőleges síkjában vannak és az AB él felező merőleges síkjára nyilvánvalóan szimmetrikusak. Ezért az említett hasonlósághoz elég azt megmutatni, hogy az EF él O-ból ugyanakkora szögben látható, mint P megfelelő éle a dodekaéder körülírt gömbjének középpontjából. Ha pedig mostani kockánk élét is a-nak vesszük, akkor azt elég belátnunk, hogy a kérdéses EF él hossza egyenlő P a-tól különböző éleinek idézett hosszával.

[1]Lásd a megoldást K. M. L. 17 (1958) 69–71. o. – P-nek 5 lapja, 6 csúcsa van, egy lapja a oldalú négyzet, összes többi élei egyenlők, közös $b = a(\sqrt{5}-1)/2$ hosszukra $ab + b^2 = a^2$, a négyzetlappal párhuzamos élének m magasságára pedig $m^2 = a(a-b)/4$. Továbbá P-nek két a négyzetlapra merőleges szimmetriasíkja van: a négyzet éleinek felező merőleges síkjai.

[2]Lásd a megoldást: K. M. L. 19 (1959) 178. o.

Messük kockánkat és g-t a $QRS = \varphi$ síkkal. A metszet a oldalú négyzet (2. ábra), ill. egy k főkör, mert a sík nyilván átmegy O-n.



2. ábra

k-nak OE sugara egyenlő a kocka testátlójának felével, $a\sqrt{3}/2$-vel. A metszetnégyzet középpontja ugyancsak O. EF-et az EFS háromszögből számítjuk, amely a szerkesztésnél fogva S-nél derékszögű és a szimmetria folytán egyenlő szárú. Legyen O vetülete QS-en T; ekkor $OT = ST = a/\sqrt{8}$ (nyilván a metszetnégyzet átlójának 4-edrésze), ezért az EOT derékszögű háromszögből $ET = a\sqrt{5/8}$, tehát $ES = ET - ST = a(\sqrt{5}-1)/\sqrt{8}$, végül $EF = ES\sqrt{2} = a(\sqrt{5}-1)/2$. Ezt akartuk bizonyítani.

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

II. megoldás: Legyenek az $ABCD$ négyzet köré írt k kör BC negyedrészét 3 egyenlő részre osztó pontok E és F (1. ábra), a BC oldal középpontja L. Így $BEFC$ nyilvánvalóan egy a k-ba írt szabályos 12-szög része, és elég megmutatnunk, hogy E-t és F-et a feladatban szereplő félegyenesek metszik ki. Ez pedig következik abból, ha bebizonyítjuk, hogy $ELB\sphericalangle = FLC\sphericalangle = 45^\circ$. Mivel a $BCFE$ négyszög szimmetrikus trapéz, elég az egyik szögről belátni, hogy 45°-os.

Legyen E, F vetülete BC-n E', F'; nyilvánvalo, hogy $E'F' = EF$, és L felezi $E'F'$-t. Elég azt megmutatnunk, hogy az ELE' derékszögű háromszög egyenlő szárú. Mármost a kerületi szögek tétele szerint $EBC\sphericalangle = EBE'\sphericalangle = 30^\circ$, ezért az EBE' derékszögű háromszögből $EE' = BE/2 = EF/2 = E'F'/2 = E'L$. Ezt akartuk bizonyítani.

2. A második állítás helyett is hasonlóan elegendő a következőt bizonyítani: a g gömbbe írt szabályos dodekaéder E, F csúcsát az $ABCD$ négyzet S középpontjával összekötő egyenes átmegy a BCC_1B_1, ADD_1A_1 négyzetek Q, R középpontján. Ehhez elég belátnunk, hogy a kérdéses egyenesek benne vannak a kocka BC élének φ felező merőleges síkjában, és az $ABCD$ lappal 45°-os szöget zárnak be.

Az I. megoldásban idézett eredmények szerint E, F valóban benne vannak φ-ben. Legyen E, F vetülete az $ABCD$ lapon E', F', ekkor nyilván $E'F' = EF$ és S felezi $E'F'$-t, és azt kell megmutatnunk, hogy az ESE' derékszögű háromszög egyenlő szárú. A kocka élét a-val, a dodekaéder élét b-vel jelölve $E'S = b/2$, az $EE' = m$ szakaszra az idézett összefüggésekből

$$m^2 = \frac{a^2 - ab}{4} = \frac{(ab + b^2) - ab}{4} = \frac{b^2}{4}$$

és így $m = b/2$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Durst István (Szolnok, Verseghy F. g. IV. o. t.)