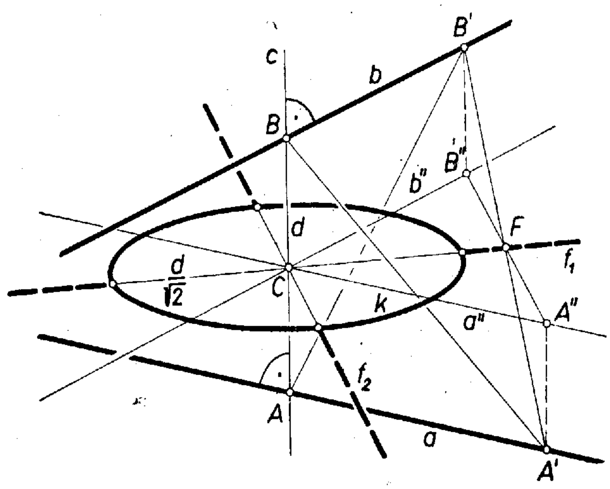
I. megoldás: 1. A kérdéses G gömb középpontja az $A'B'$ szakasz F felezőpontja, sugara pedig FA'. Elegendő megmutatnunk, hogy az $A'B'A$ háromszögben az A csúcsnál derékszög van. Ebből ugyanis már következik, hogy az $A'B'A$ síkban az $A'B'$ szakasz mint átmérő fölé írt Thalész–kör átmegy A-n, vagyis hogy A-nak F-től mért távolsága egyenlő FA'-vel, tehát A rajta van G-n.



Valóban, az $AA' = a$ egyenes merőleges AB'-re, mert a feltevés szerint a merőleges az ABB' síknak egymással nem párhuzamos b és c egyenesére, ezért a merőleges e síkra, ennek minden egyenesére, köztük AB'-re. Ezt akartuk bizonyítani. – Ugyanígy látható be, hogy az $A'B'B$ háromszögben B-nél derékszög van, tehát B is rajta van G-n.

2. Ezek szerint A és B egyenlő távolságra vannak F-től, más szóval minden szóba jövő F pont egyenlő távolságra van A és B-től, vagyis benne van az AB szakasz φ felező merőleges síkjában. Így φ merőleges c-re, ezért párhuzamos a és b-vel. Messe φ a c-t C-ben – vagyis $AC = CB$ –, és legyen A' és B' (merőleges) vetülete φ-n A'', B'', ekkor a, b vetülete φ-n a $CA'' = a''$, $CB'' = b''$ egyenes, $a'' \parallel a$, $b'' \parallel b$, tehát a feltevés f olytán $a'' \perp b''$, továbbá $CA'' = AA' = BB' = CB''$, tehát $A''B''C$ egy egyenlő szárú derékszögű háromszög. F felezi az $A''B''$ szakaszt, mert az $FA'A''$ és $FB'B''$ derékszögű háromszögek egybevágók – átfogóik egyenlők, és egy–egy hegyesszögük váltószög –, tehát CF az $A''B''C$ háromszög súlyvonala és egyben a C-nél levő szög felezője. Ezek szerint F minden esetben rajta van az a'', b'' egyenesek közti valamelyik szög f felezőjén. Végül mivel e háromszögben $CF = CA''/\sqrt{2} = AA'/\sqrt{2}$, és $AA' > d$, azért $CF > d/\sqrt{2}$, tehát F kívül esik a C körül φ-ben $d/\sqrt{2}$ sugárral írt k körön.

Fordítva nyilvánvaló, hogy bármely ezen feltételeknek megfelelő F^* ponton át CF^*-ra merőlegesen állított sík a'', b'', a, b-ből olyan A'', B'', A', B' pontot metszi ki, amelyre $AA' = CA'' = CB'' = BB' > d$, tehát minden ilyen F^* beletartozik a mértani helybe. Így a keresett mértani helyet az a'', b'' egyenespár két szögfelezőjének a k-n kívüli pontjai alkotják. (A k-val való metszéspontok, a négy félegyenes végpontjai, nem tartoznak a mértani helyhez. Egyébként a bizonyításban az $AA' > d$ megszorítást nem használtuk fel. Ezt mellőzve a mértani helyet a két szögfelező összes pontjai alkotják.)

Bencsik István (Budapest, Eötvös J. g. IV. o. t.)

II. megoldás (a feladat első részére): Az $A'A$, AB és BB' egymás után kapcsolódó szakaszok páronként merőlegesek egymásra, ezért tekinthetők egy T téglatest három élének; T két lapsíkját az a, c, ill. c, b metsző egyenespár határozza meg, további két lapsíkja ezekkel párhuzamos és átmegy B'-n, ill. A'-n, a hátralevő kettő pedig c-re merőleges és átmegy A-n, ill. B-n. ($AA' = BB'$ folytán T ún. négyzetes oszlop.) – Ismeretes, hogy minden téglatest átlói egyenlők és páronként felezik egymást, tehát a téglatest köré gömb írható (olyan gömb, mely átmegy a test valamennyi csúcsán). – Most már a bizonyítandó állítás abból következik, hogy az $A'B'$ szakasz T egyik testátlója.

Hanyi Zsolt (Szombathely, Nagy Lajos g. III. o. t.)

Megjegyzés. Többen az alakzatot az ábrázoló geometriából ismert térbeli derékszögű koordinátarendszerben helyezték el, az állítást ebben végzett számítással bizonyították és a mértani helyet is egyenletrendszerével adták meg.