

1. Határozzuk meg a következő sor összegét:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 9.$$

Ha e sort megszorozzuk és elosztjuk 3-mal, úgy ered:

$$\frac{1}{3}(1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 4 \cdot 5 \cdot 3 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 7 \cdot 3 + 7 \cdot 8 \cdot 3 + 8 \cdot 9 \cdot 3).$$

A zárójelben álló első két tag összege:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3(1 + 3) = 2 \cdot 3 \cdot 4.$$

Adjuk ehhez a harmadik tagot:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4(2 + 3) = 3 \cdot 4 \cdot 5$$

ezen eljárást megismételve:

$$3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 \cdot 5(3 + 3) = 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 3 + 5 \cdot 6(4 + 3) = 5 \cdot 6 \cdot 7 \text{ stb.}$$

Ennélfogva

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 8 \cdot 9 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{3}.$$

Tehát általánosan

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

2. Határozzuk meg e sor összegét:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7$$

4-gyel szorozva és osztva:

$$\frac{1}{4}(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 4 + 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 4)$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 4(1 + 4) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot (2 + 4) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

s így

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4}$$

vagy általánosan

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2) &= \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}. \end{aligned}$$

3. Hasonlóképpen találjuk, hogy:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots +$$

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}.$$

*Alkalmazások. 1. A természetes számok négyzeteinek összege* (lásd: K.M.L.IV. évf. 112. lap.).

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots$$

$$n(n+1) - (1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n) =$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{6}(2n+4-3) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

*2. A természetes számok köbeinek összege.* Minthogy

$$n(n+1)(n+2) = n^3 + 3n^2 + 2n$$

ezért

$$n^3 = n(n+1)(n+2) - 3n^2 + 2n$$

s így

$$\begin{aligned}1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \\ &+ \dots + n(n+1)(n+2) - 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - \\ &- 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - \\ &- \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)}{4}(n^2 + 5n + 6 - 4n - 2 - 4) = \frac{n(n+1)}{4}n(n+1) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

3. A természetes számok negyedik hatványainak összege. Mínthogy

$$n(n+1)(n+2)(n+3) = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$$

ezért

$$n^4 = n(n+1)(n+2)(n+3) - 6n^3 - 11n^2 - 6n$$

s így

$$\begin{aligned}1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 + \dots + \\ &+ n(n+1)(n+2)(n+3) - 6(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3) = \\ &- 11(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) - 6(1 + 2 + 3 + \dots + n) = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5} - \frac{6}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{11}{6}n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) = \\ &= \frac{n(n+1)}{30}(6n^3 + 9n^2 + n - 1) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)}{30}.\end{aligned}$$

Arad.

*Fuchs Károly.*