A természetes számok négyzeteinek összegét következőképpen határozhatjuk meg:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3.1^2 + 3.1 + 1$$
$$3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3.2^2 + 3.2 + 1$$
$$4^3 = (3+1)^3 = 3^3 + 3.3^2 + 3.3 + 1$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3.n^2 + 3.n + 1.$$

Adjuk össze az egymás alatt álló tagokat s vonjuk ki az egyenlet mindkét oldalából az

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

összeget, úgy ered:

$$(n+1)^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n + 1,$$

miből

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n - 1$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

vagy végre:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$