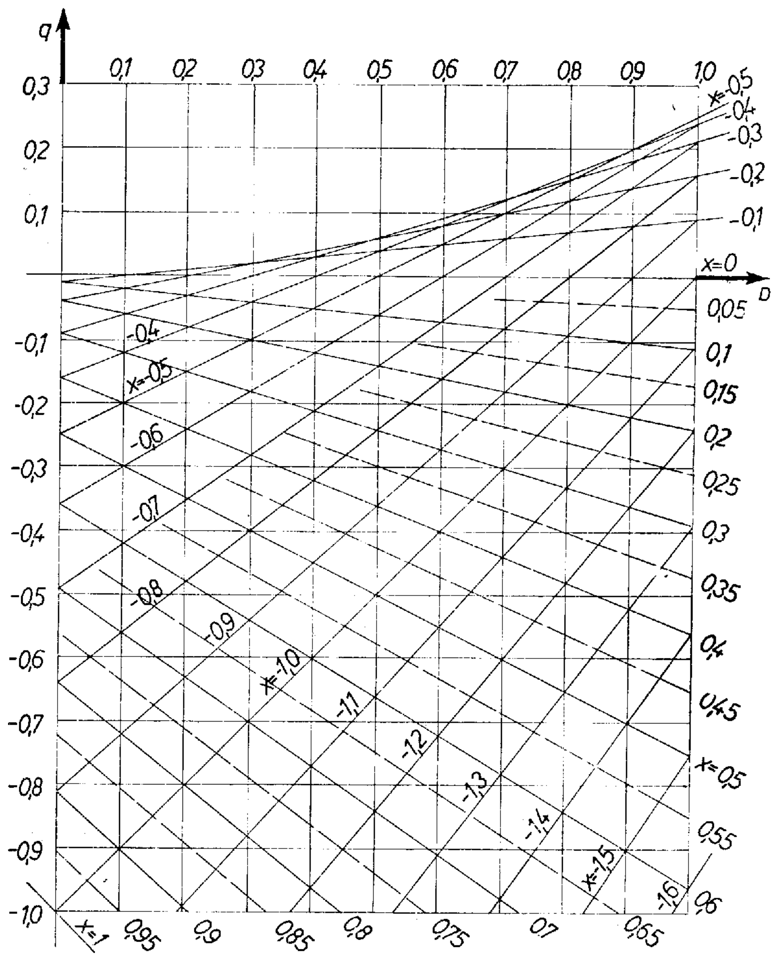
Az, hegy az x_0 (valós) szám gyöke a p, q együtthatókhoz tartozó, a feladatban szereplő alakú egyenletnek, az azt jelenti, hogy teljesül

$$x_0^2 + px_0 + q = 0. \tag{1}$$

Ha az egyes egyenleteket egy derékszögű koordinátarendszerben a $(p,\, q)$ ponttal ábrázoljuk, akkor – az (1) egyenletben p-t és q-t változónak tekintve – mindazokat az egyenleteket képviselő pontok, amely egyenleteknek az x_0 gyöke, egy egyenest, a

$$q = -x_0 p - x_0^2$$

egyenlettel jellemzett e egyenest alkotják. Elvben az összes (x_0 minden valós értékéhez tartozó) e egyenesek alkotják a szóban forgó nomogramot. Egy $(p_0,\, q_0)$ ponton azon x értékekhez tartozó egyenesek mennek át, amely x értékek kielégítik a $(p_0,\, q_0)$ ponttal ábrázolt egyenletet. Gyakorlatban korlátozzuk a $(p,\, q)$ pontokat a sík egy véges részére a várható szükségletnek megfelelően (a gyakorlati alkalmazásokban ugyanis rendszerint csak bizonyos korlátok közötti $(p,\, q)$ együtthatókra kell felkészülnünk); továbbá csak kiválogatott x értékekhez tartozó egyenesek egy–egy szakaszát rajzoljuk meg úgy, hogy az egyenesek biztosan követhetők legyenek addig, ahol mellettük a megfelelő p, q, x érték félreérthetetlenül feltüntethető. Célszerű továbbá olyan utasítást adni – amennyiben ez lehetséges –, amelynek alapján a nomogram használhatósági tartománya kiterjeszthető.



A sík $p < 0$ félsíkján mellőzhetjük a nomogram elkészítését, mert $p < 0$ esetén a $g(x) \equiv x^2 + px + q = 0$ gyökei az $f(x) \equiv x^2 - px + q = 0$ gyökeiből (-1)-gyel való szorzás útján megkaphatók. Ugyanis $g(-x) \equiv f(x)$, tehát ha valamely x_1-re $f(x_1) = 0$, akkor $g(-x_1) = 0$.

Az ábrán a sík p, q-koordinátarendszerének csak a $0 \le p \le 1$, $-1 \le q \le 0{,}25$ téglalapját tüntettük fel, és ezen az x szám $0{,}1\, n$ értékeihez tartozó e egyeneseket, ahol n egész szám. Téglalapunkon csak a $-16 \le n \le 10$ értékekhez tartozó egyeneseknek van pontjuk.

A nomogram használata általában egyezik a 963. feladatban látott nomograméval. Pl. az $x^2 + 0{,}5x - 0{,}36 = 0$ egyenlet gyökei $x_1 = -0{,}9$ és $x_2 = 0{,}4$, mert a $(0{,}5;\, -0{,}36)$ ponton két egyenes megy át és azokon az $x = -0{,}9$ és $x = 0{,}4$ paraméter-érték van feltüntetve. Ha a $(p,\, q)$ pont „közelében” nem fekszik e egyenes, akkor az egyenletnek nincs valós gyöke. Ha a pont az ábra „üres” és behálózott részének határán van, akkor vagy két egyenlő, vagy két majdnem egyenlő valós gyök van, vagy pedig olyan konjugált komplex gyökpár, amelyben a képzetes rész „kicsi”.

Ha $|p|$ és q egyike vagy mindketteje kívül esik a figyelembe vett, fenti korlátokon, akkor keressük meg a legkisebb olyan pozitív egész α, ill. 2β kitevőt, amelyre már teljesül

$$\frac{|p|}{10^\alpha} \le 1, \qquad \text{ill.} \qquad -1 \le \frac{q}{10^{2\beta}} \le 0{,}25,$$

majd α és β nagyobbikát γ-val jelölve alkalmazzuk az $x^2+px+q=0$ egyenletre az $x=10^\gamma z$ helyettesítést. Így z-re teljesülnie kell a

$$10^{2\gamma}z^2+10^\gamma pz+q=0, \quad \text{azaz} \quad z^2+\frac{p}{10^\gamma}z+\frac{q}{10^{2\gamma}}=0$$

egyenletnek, az utóbbi egyenlet gyökei pedig ábránkról leolvashatók, mert

$$\left|\frac{p}{10^\gamma}\right|=\frac{|p|}{10^\gamma}\le\frac{|p|}{10^\alpha} \quad \text{és} \quad \left|\frac{q}{10^{2\gamma}}\right|\le\frac{|q|}{10^{2\beta}}.$$

Pl. az $x^2-25x-99{,}9=0$ egyenlet esetében $\alpha=2$ és $\beta=1$, mert $25/10^2=0{,}25\le 1$ és $-1\le -99{,}9/10^2\le 0{,}25$, ennélfogva $\gamma=2$, és $x=-10^2z$-vel $z^2+0{,}25\,z-0{,}00999=0$-hez leolvasható $z_1\approx 0{,}03$ és $z_2\approx -0{,}28$, tehát $x_1\approx -3$, $x_2\approx +28$ (Számítással $x_1\approx -3{,}504\ldots$ és $x_2\approx -28{,}504\ldots$ adódik.)

Hasonlóan, ha p és q abszolút értékben közel járnak 0-hoz és a legnagyobb olyan pozitív egész δ, ε, amellyel még fennáll

$$10^\delta|p|\le 1, \quad \text{ill.} \quad -1\le 10^{2\varepsilon}\,q\le 0{,}25,$$

akkor δ és ε kisebbikét η-val jelölve $x=z/10^\eta$ helyettesítéssel olyan egyenletet kapunk, amelynek gyökei a nomogramról pontosabban olvashatók le, mint az eredeti egyenletéi, mert így várható, hogy a $(p,\,q)$ pont körül a „szomszédos” e egyenesek távolsága nagyobb.

$x=kz$ alakú helyettesítést természetesen 10^γ és $1/10^\eta$ helyett más k-val is alkalmazhatunk, pl. a $k=2$, $^1/_2$, 5, $^1/_5$ értékekkel a fellépő mellékszámítások könnyűek.

Székely Jenő (Pécs, Nagy Lajos g. III. o. t.)

Megjegyzés. Nomogramunkat fordítva az $x_1x_2=q$ szorzat és az $x_1+x_2=-p$ összeg leolvasására is lehet használni.