Ha ABC hegyesszögű háromszögben a magasságok talppontjait egyenesek által összekötjük, kapjuk az $A_1B_1C_1$ talpponti háromszöget, melynek számos érdekes tulajdonsága közül néhányat bemutatunk.

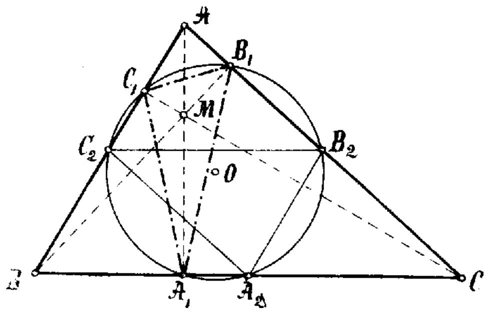
1. *A háromszög magasságai a talpponti háromszög szögeit felezik.*

Bizonyítás. ABA_1B_1 húrnégyszög, miért is $BA_1B_1\sphericalangle = 180°-\alpha$, tehát $B_1A_1C\sphericalangle = \alpha$; ACA_1C_1 szintén húrnégyszög, miért is $C_1A_1C\sphericalangle = 180° - \alpha$, s így $C_1A_1B\sphericalangle = \alpha$; tehát $AA_1C_1\sphericalangle = 90° - \alpha$, $AA_1B_1\sphericalangle = 90° - \alpha$, s így $AA_1C_1\sphericalangle = AA_1B_1\sphericalangle$. Ép így bebizonyítjuk, hogy a B_1 és C_1 szögek is feleztetnek a magasságok által.

Ezen tétel alkalmazásával könnyen megszerkeszthető a háromszög, ha a magasságok talppontjai vannak megadva. A három megadott pontból háromszöget szerkesztünk, ennek szögeit megfelezzük és a szögfelezőkre a megadott pontokban merőlegeseket emelünk. E merőlegesek meghatározzák a keresett háromszöget.

2. *Az eredeti háromszögből a talpponti háromszög oldalai az eredeti háromszöghöz hasonló háromszögeket vágnak ki;* pl. $AB_1C_1\triangle \sim ABC\triangle$.

Bizonyítás. α szög a két háromszögben közös; $AB_1C_1\sphericalangle = \beta$, mert BC_1B_1C húrnégyszög. Épp így kimutatható, hogy $B_1CA_1\triangle \sim BCA\triangle$ és $A_1BC_1\triangle \sim ABC\triangle$.



E tétel alkalmazásával kiszámíthatjuk a talpponti háromszög oldalait. AB_1C_1 és ABC háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$B_1C_1 : AB_1 = BC : AB$$

miből

$$B_1C_1 = BC\frac{AB_1}{AB} = a\cos\alpha.$$

Épp így kapjuk, hogy: $B_1A_1 = c\cos\gamma$ és $A_1C_1 = b\cos\beta$.

A $B_1C_1 = \alpha_1$ oldallal szemben fekvő szög $\alpha_1 = 180° - 2\alpha$, épp így $\beta_1 = 180° - 2\beta$, $\gamma_1 = 180° - 2\gamma$.

3. *A talpponti háromszög köré írható kör az eredeti háromszög oldalainak középpontjain megy át.*

Bizonyítás. Legyenek azon pontok, melyekben a talpponti háromszög köré írható kör az eredeti háromszög oldalait metszi A_2, B_2, C_2. Be kell bizonyítanunk, hogy $BA_2 = A_2C$, $CB_2 = B_2A$, $AC_2 = C_2B$. A talppontokon átmenő körre alkalmazzuk azon tételt, hogy az A pontból kiinduló metszők viszonya akkora, a mekkora a körön kívül fekvő metszeteik megfordított rendben vett viszonya;

$$AC_2 : AB_2 = AB_1 : AC_1$$

ABB_1 és ACC_1 háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$AB_1 : AC_1 = AB : AC$$

s így

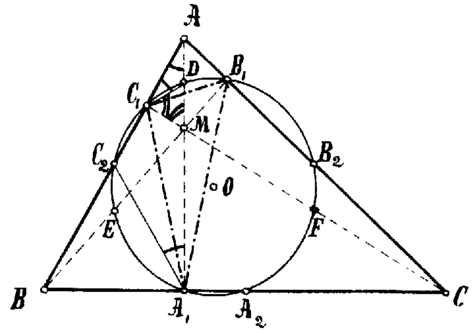
$$AB : AC = AC_2 : AB_2$$

tehát B_2C_2 párhuzamos BC-vel; épp így kimutathatjuk, hogy A_2B_2 párhuzamos AB-vel és A_2C_2 párhuzamos AC-vel.

De ezzel bebizonyítottuk, hogy $AC_2A_2B_2$, $BA_2B_2C_2$ és $CB_2C_2A_2$ négyszögek egyenközények s így $B_2C_2 = BA_2 = A_2C$, $A_2C_2 = CB_2 = B_2A$ és $A_2B_2 = AC_2 = C_2B$.

4. *A talpponti háromszög köré írható kör felezi a magasságoknak azon részeit, melyek a háromszög csúcsait azon* (M) *ponttal kötik össze, melyben a magasságok egymást metszik.*

Bizonyítás. Meg kell mutatnunk, hogy a D, E, F pontok, melyekben a talpponti háromszög köré írható kör a magasságokat metszi, felezik az MA, MB és MC távolságokat: tehát hogy: $DA = DM$, $EB = EM$, $FC = FM$.



AA_1B derékszögű háromszög A_1 csúcsát az átfogó C_2 középpontjával összekötve, egyenlő szárú háromszöget kapunk, tehát: $C_2AA_1 \sphericalangle = AA_1C_2 \sphericalangle = \delta$; $DC_1C_2A_1$ húrnégyszög (a talpponti háromszög köré írható kör átmegy e négyszög csúcsain), tehát $AA_1C_2 \sphericalangle = AC_1D \sphericalangle = \delta$ s így AC_1D háromszög egyenlőszárú, tehát $AD = C_1D$; AMC_1 derékszögű háromszögben $C_1AM \sphericalangle + AMC_1 \sphericalangle = 90°$, $AC_1D \sphericalangle + DC_1M \sphericalangle = 90°$, mely két egyenletből – a baloldalakat egymással egyenlővé téve – kapjuk: $\delta + AMC_1 \sphericalangle = \delta + DC_1M \sphericalangle$, miből $AMC_1 \sphericalangle = DC_1M \sphericalangle = \varepsilon$, s így C_1DM háromszög egyenlőszárú, tehát $C_1D = MD$; de elébb láttuk, hogy $C_1D = AD$, miért is $AD = DM$. Épp így bebizonyítható, hogy $EB = EM$ és $FC = FM$.

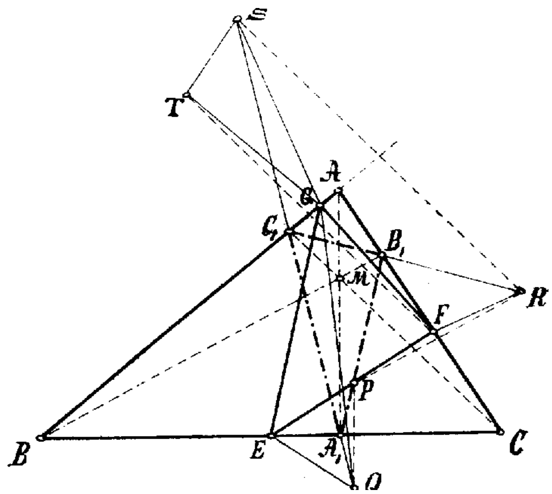
Azon kört, mely a háromszög magasságainak talppontjain (A_1, B_1, C_1), az oldalak középpontjain (A_2, B_2, C_2) és a magasságoknak a csúcsok felé eső részeinek középpontjain (D, E, F) megy át, Feuerbach-féle körnek nevezzük.

5. *A Feuerbach-féle kör átmérője ($2r$) az eredeti háromszög köré írható kör sugarával (R) egyenlő.*

Bizonyítás. A 2. pontban láttuk, hogy a talpponti háromszög egyik oldala $a_1 = a\cos\alpha$; az ezen oldallal szemben fekő szög $\alpha_1 = 180° - 2\alpha$; de $a = 2R\sin\alpha$ s így $\alpha_1 = 2R\sin\alpha\cos\alpha = R\sin 2\alpha$; másrészt a talpponti háromszögből $\alpha_1 = 2r\sin(180° - 2\alpha) = 2r\sin 2\alpha$, s így $R\sin 2\alpha = 2r\sin 2\alpha$, miből $R = 2r$.

6. *A talpponti háromszög a beírt háromszögek közül legkisebb kerületű.* [1]

Bizonyítás. Legyen EFG egy tetszés szerinti beírt háromszög, melynek egyik oldala a talpponti háromszög oldalát P pontban metszi.



Ha P pont tükörképe BC oldalra nézve Q, úgy QA_1 lesz PA_1-nek és QE lesz PE-nek vele egyenlő tükörképe: QA_1 egy egyenesbe esik C_1A_1-gyel, mert az eredeti háromszög oldalai a talpponti háromszög külső szögeit felezik. Legyen továbbá P pont tükörképe AC oldalra nézve R; akkor RB_1 a PB_1-nek és RF a PF-nek tükörképe és RB_1 egy egyenesbe esik B_1C_1-gyel. Ha továbbá R-nek tükörképe AB oldalra nézve S, úgy SC_1 lesz RC_1-nek képe; SC_1 pedig C_1A_1-gyel esik egy egyenesbe. Ha végre F pontnak AB-re vonatkoztatott tükörképe T, úgy STG törtvonal lesz RFG törtvonal tükörképe. SQ nem más, mint a talpponti háromszög kerülete k, mert:

$$SQ = SC_1 + C_1A_1 + A_1Q = RB_1 + B_1C_1 + C_1A_1 + A_1P = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = k$$

$STGEQ$ törtvonal pedig EFG háromszög kerülete K, mert:

$$STGEQ = ST + TG + GE + EQ = RF + FG + GE + EP =$$

$$= PF + FG + GE + EP = K$$

[1] Lafremoire: "Problémes et théorémes de géometrie élémentaire.

STG és GEQ háromszögekben, két oldal összege nagyobb lévén a harmadiknál,

$$ST + TG > SG$$

és

$$GE + EQ > GQ$$

mely két egyenlőtlenségből:

$$ST + TG + GE + EQ = K > SG + GQ.$$

De SGQ háromszögből:

$$SG + GO > SQ = k$$

s így

$$K > SG + GQ > k$$

tehát

$$K > k.$$