(H.C.E. Martus: Mathematikai feladatok.)

Ha az $A_1A_2A_3$ háromszög síkjának bármely P pontjából az oldalakhoz p_1, p_2, p_3 tetszés szerinti irányú távolságokat húzzuk s ezekhez a megfelelő csúcsokból d_1, d_2, d_3 párhuzamosokat vonjuk, akkor mindig:

$$\frac{p_1}{d_1}+\frac{p_2}{d_2}+\frac{p_3}{d_3}=1.$$

Megjegyzendő, hogy ez egyenlőség bal oldalán álló összeg bármely tagja pozitív vagy negatív, a szerint, a mint az arányt alkotó távolságok egyenlő vagy ellenkező irányúak.

A tétel bizonyítása legegyszerűbben területek összehasonlítása alapján eszközölhető, de a párhuzamos átszelők tételének gyakorlására is jó alkalmat nyújt.

Bizonyítás. Legyenek a P pontból induló távolságoknak a megfelelő oldalakra eső talppontjai:$P_1,\ P_2,\ P_3$ s a csúcsokból induló megfelelő párhuzamosokéi: $A_1',\ A_2',\ A_3'$, úgy hogy:

$$A_kA_k'=d_k,\ PP_k=p_k,\ (k=1,\ 2,\ 3)$$

Képzeljük P pontból az oldalakra bocsátott merőlegeseket, melyeknek talppontjai $P_1,\ P_2,\ P_3$ és a háromszög megfelelő magasságait, melyeknek talppontjai $A_1'',\ A_2'',\ A_3''$. PA_2A_3 és $A_1A_2A_3$ háromszögek területeinek aránya, egyenlő alapúak lévén, egyenlő a magasságok arányával, azaz:

$$\frac{PA_2A_3}{\mathit{\Delta}}=\frac{PP_1'}{m_1}.$$

Ámde

$$PP_1'P_1\Delta\sim A_1A_1''A_1'\Delta$$

és így

$$\frac{PP_1'}{m_1}=\frac{PP_1'}{A_1A_1'}=\frac{p_1}{d_1}=\frac{PA_2A_3}{\mathit{\Delta}} \tag{1}$$

hol $\mathit{\Delta}$ az adott háromszög területe, m_1 az A_2A_3 oldalhoz tartozó magasság.

Teljesen hasonló okokból:

$$\frac{p_2}{d_2}=\frac{PA_3A_1}{\mathit{\Delta}} \tag{2}$$

és

$$\frac{p_3}{d_3}=\frac{PA_1A_2}{\mathit{\Delta}} \tag{3}$$

Az (1), (2), (3) egyenlőségek összeadásából:

$$\frac{p_1}{d_1}+\frac{p_2}{d_2}+\frac{p_3}{d_3}=\frac{PA_2A_3+PA_3A_1+PA_1A_2}{\mathit{\Delta}}=1,$$

mert az egyenlőség jobb oldalán a számláló mindig az adott háromszög területe, algebrai összeg alakjában.

E tétel alapján a háromszögekre vonatkozó több geometriai igazság egyszerűen felírható.

a) Ha P a beírt kör középpontja és $PP_k=\rho$, akkor:

$$\frac{\rho}{m_1}+\frac{\rho}{m_2}+\frac{\rho}{m_3}=1,\ \text{vagy}\ \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{\rho}.$$

Ha P az a_k oldalt és a másik kettő megnyújtását érintő kör középpontja:

$$-\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{\rho_1},\qquad \frac{1}{m_1}-\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_3}=\frac{1}{\rho_2},$$

$$\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}-\frac{1}{m_3}=\frac{1}{\rho_3}$$

egyenlőségek állanak, mert ez esetben ρ_k és m_k mindig ellenkező irányúak.

Ez egyenlőségekben foglalt igazságot szóval így fejezhetjük ki: *a háromszög érintő körei bármelyikének görbülete egyenlő a magasságokkal, mint sugarakkal leírt körök görbületeinek algebrai összegével.*

A három utolsó egyenlet összeadása pedig:

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_3}=\frac{1}{\rho}$$

egyenletre vezet, mely szerint *a kívülről érintő körök görbületeinek összege egyenlő a beírt kör görbületével, vagy a mi egyre megy: a magasságokkal mint sugarakkal leírt körök görbületeinek összegével.*

b) Ha P a körülírt kör középpontja és így:

$$PP_k' = \frac{a_k}{2}\cot A_k,$$

akkor:

$$\frac{a_1}{2m_1}\cot A_1 + \frac{a_2}{2m_2}\cot A_2 + \frac{a_3}{2m_3}\cot A_3 = 1.$$

Ha ez egyenlőség bal oldalán minden tag számlálóját és nevezőjét a_k-val sokszorozzuk: tekintve, hogy $a_1m_1 = a_2m_2 = a_3m_3 = 2\mathit{\Delta}$,

$$a_1^2\cot A_1 + a_2^2\cot A_2 + +a_3^2\cot A_3 = 4\mathit{\Delta}$$

ered. A bal oldal egyes tagjai még így is írhatók:

$$\frac{a_1}{\sin A_1}a_1\cos A_1,\ \ \frac{a_2}{\sin A_2}a_2\cos A_2,\ \ \frac{a_3}{\sin A_3}a_3\cos A_3,$$

melyekben mint ismeretes:

$$\frac{a_1}{\sin A_1} = \frac{a_2}{\sin A_2} = \frac{a_3}{\sin A_3} = 2r,$$

a körülírt kör átmérője, minek tekintetbe vételével az előbbi egyenlet így alakul:

$$r(a_1\cos A_1 + a_2\cos A_2 + a_3\cos A_3) = 2\mathit{\Delta}.$$

Ez egyenlőség szerint *a háromszög kétszeres területe egyenlő a körülírt kör sugara és a talpponti háromszög (beírható minimum kerületű háromszög) kerületéből alkotható derékszögű parallelogrammaéval.*

Pécs.

Maksay Zsigmond,
főreáliskolai tanár.