

¹ A K.M.L. egyik legutóbbi számában olvastam néhány tréfás mennyiségtani bebizonyítást, s ez felbátorít arra, hogy sorozatukat folytassam. Igen szellemes és fogas kérdésekre akadni Rebiere: Mathématiques et Mathématiciens című munkájában, a "Mathesis" című belga folyóirat 1892. és 1893. évfolyamaiban. Az alábbiakban tárgyaltak közül némelyiket innét vettem, de vannak olyanok is, melyeknek eredetéről nem tudok beszámolni.

Most pedig arra figyelmeztetem a szíves olvasót, hogy innét kezdve ne higgyen el nekem semmit.

1. Bebizonyítom, hogy $100 = 1$.

Legyen $a = 100$, $b = 101$, $c = 1$.

$$\begin{aligned} a &= b - c \\ a^2 &= ab - ac \\ a^2 - ab &= -ac \\ a^2 - ab + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} - (b - c)c \\ a^2 - ab + \frac{b^2}{4} &= \frac{b^2}{4} - bc + c^2 \\ \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 &= \left(c - \frac{b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

s mindkét oldalon négyzetgyököt vonván

$$a - \frac{b}{2} = c - \frac{b}{2}$$

vagyis

$$a = c.$$

Q.E.D.

2. Az összes számok egymás közt egyenlők. Ugyanis vegyünk fel két tetszés szerinti számot, a -t és b -t, melyek különbsége $= c$; tehát

$$a - b = c.$$

Mindkét oldalon $(a - b)$ -vel szorozván

$$\begin{aligned} a^2 - ab - ab + b^2 &= ac - bc \\ a^2 - ab - ac &= ab - b^2 - bc \\ a(a - b - c) &= b(a - b - c) \end{aligned}$$

s a közös tényezővel való osztás után

$$a = b.$$

Q.E.D.

3. Bebizonyítom, hogy $2 = -1$.

Induljunk ki az alábbi evidens egyenlőségekből:

$$\begin{aligned} a + b &= -c \\ a + c &= -b \\ b + c &= -a \end{aligned}$$

Összegük

$$2(a + b + c) = -(a + b + c)$$

honnét

$$2 = -1.$$

Q.E.D.

4. A számok egyenlőségének egy másik bebizonyításánál a következő evidens föltevésből indulunk ki:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2$$

¹Kérjük az egyes bizonyításokban előforduló hibák megjelölését.

$$a(a - a) = (a + a)(a - a)$$

$(a - a)$ -val egyszerűsítvén

$$a = a + a$$

$$a = 2a$$

tehát

$$1 = 2$$

s ha mindkét oldalon 1-et hozzáadunk, akkor azt találjuk, hogy $2 = 3$, $3 = 4$ stb.

5. Ha a nem egyenlő b -vel, a mit röviden így szokás jelölni: $a \neq b$, akkor $x - a \neq x - b$, tehát $(x - a)^2 \neq (x - b)^2$. Ennélfogva az

$$(x - a)^2 = (x - b)^2$$

egyenlet lehetetlennek látszik. Ámde

$$x^2 - 2ax + a^2 = x^2 - 2bx + b^2,$$

honnét

$$x = \frac{1}{2}(a + b).$$

Így tehát a lehetetlennek mondott egyenletnek mégis van gyöke.

6. Adva van a következő egyenlet:

$$\frac{3x - b}{3x - 5b} = \frac{3a - 4b}{3a - 8b}.$$

Az egyenlőségi jel két oldalán álló tört kifejezések nem egyenlők az egységgel. Ismert tétel szerint, ha két egyenlő tört számlálójának különbségét elosztjuk nevezőiknek különbségével, egy az adottakkal egyenlő törtet nyerünk. Ezt a mi esetünkben alkalmazván

$$\frac{3x - 3a + 3b}{3x - 3a + 3b}$$

kifejezéshez jutunk, mely $= 1$; tehát az adott törtnek mindegyike egyenlő az egységgel.

7. Nem igaz, hogy: ha két mennyiség egyenkint egyenlő egy harmadikkal, akkor azok egymás közt is egyenlők. Mert föltéve, hogy

$$\frac{x - a + c}{y - a + b} = \frac{b}{c}, \quad \frac{x + c}{y + b} = \frac{a + b}{a + c}$$

s ezen egyenlő törtekre a 6)-ban említett tételt alkalmazzuk, akkor

$$\frac{x - a - b + c}{y - a + b - c} = \frac{b}{c}, \quad \frac{x - a - b + c}{y - a + b - c} = \frac{a + b}{a + c}$$

tehát az eleinte idézett elv szerint

$$\frac{b}{c} = \frac{a + b}{a + c}$$

a mi nyilván absurdum: hiszen ha a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazon mennyiséggel növelem, akkor értéke megváltozik.

8. A törtek egyenlőségére vonatkozó tételek egyáltalán érvénytelenek. Induljunk ki a következő egyenletből.

$$\frac{x + 1}{a + b + 1} = \frac{x - 1}{a + b - 1}.$$

Vonjuk ki mindkét oldalon az 1-et következőképpen:

$$\frac{x + 1}{a + b + 1} - \frac{a + b + 1}{a + b + 1} = \frac{x - 1}{a + b - 1} - \frac{a + b - 1}{a + b - 1}$$

akkor

$$\frac{x - a - b}{a + b + 1} = \frac{x - a - b}{a + b - 1}$$

tehát két egyenlő számlálójú tört akkor is egyenlő értékű lehet, ha nevezőik különbözők.

Az adott egyenlet reciprok értékét tekintvén

$$\frac{a + b + 1}{x + 1} = \frac{a + b - 1}{x - 1}$$

honnét hasonlóképpen

$$\frac{a+b+1}{x+1} - \frac{x+1}{x+1} = \frac{a+b-1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}$$
$$\frac{a+b-x}{x+1} = \frac{a+b-x}{x-1}$$

s a megfordított értékekre térvén vissza

$$\frac{x+1}{a+b-x} = \frac{x-1}{a+b-x}$$

vagyis két egyenlő tört értéke akkor is egyenlő lehet, ha számlálók különbözőek.

Budapest,

Dr. Bozóky Endre.