Pythagoras még ezenkívül is foglalkozott az egyenlőszárú derékszögű háromszöggel, illetőleg ennek oldalaival.

Ha befogókul az egységet választotta, azt találta, hogy az átfogó nagyobb mint 1, de kisebb mint 2. Úgy látszik, elég tüzetesen foglalkozott az átfogó hosszával (mai jelölésünk szerint: $\sqrt{2}$, mert ennek kifejező számát végre is: apoyovnak, kimondhatatlan számnak mondta. Evvel a kifejezéssel tehát a manapság: irracionálisoknak nevezett számokat jelölte meg. E kifejezés "kimondhatatlan szám" mindenesetre azt jelentette, hogy nem lehet oly kis egységet találni, mely a befogóban is, meg az átfogóban is egész szám szerint bennfoglaltassék, szóval: az egyenlőszárú derékszögű háromszög befogójának és átfogójának nincsen közös mértéke, azok összemérhetetlenek (inkommenzurábilisok). A jelek arra mutatnak, hogy az összemérhetetlenséggel mindazonáltal továbbra is foglalkoztak a pythagoreusok; arra utaltak, hogy valamely "kimondhatatlan" szám és pl. az egység között a közös mértéknek végtelen kicsinynek kell lennie, mely ennélfogva a véges hosszúságokban végtelen sokszor foglaltatik. Pythagoras iskolája tehát nyilván azt a felfogást vallotta, hogy a vonat (felület, test) pontoknak: azaz végtelen nagy számú, de végtelen kicsiny elemeknek az összege. A pontnak egyszersmind ily értelmű definíciót is adtak, hogy az: egység egy bizonyos helyen. Nagyon valószínű, hogy az időt is végtelen kis időközöknek: pillanatok összegének tekintették. Úgy látszik, Pythagoras iskolájának tagjai erősen védték e felfogást, mert mások erősen támadták, különösen Zeno, az ú. n. eleai iskola tagja, a ki kb. 500-ban Kr. e. született és az V. század közepén hevesen harczolt Pythagoras hívei ellen. Zeno nem volt tulajdonképpen mathematikus, de eléggé szellemes és meglepő ötletekkel Pythagoras mathematikai tanait is meg akarta dönteni. Kiválóan azt a felfogást akarta "ad absurdum" vezetni, hogy valamely vonalat végtelen sok számú vonalra lehet felosztani, illetőleg azt ezekből összeállítani. Kiválóan két ily bizonyítása érdekes: az egyik az, hogy ily alapon mozgás nem is lehetséges, mert hiszen, hogy valamely test egy bizonyos utat megtegyen, arra először ez útnak a felét kell megtennie, azután a másik félnek a felét, azután újra meg újra a fennmaradó résznek a felét s így tovább a végtelenségig, ennélfogva a mozgó test sohasem érheti el az út másik végpontját, tehát mozgás nem is lehetséges. A másik bizonyítása az, hogy a gyorslábú Achilles sohasem érheti utól az előtte mászó teknősbékát: mert, míg Achilles odaszaladt, a hol a teknősbéka előbb volt, ez már tovább mászott. Achillesnek újból a teknősbéka után kell szaladnia, de amikor odaér, ahol a teknősbéka volt, ez már megint elmászott. A dolog tehát örökkön-örökké úgy áll, hogy a mikor Achilles odaért, a hol a teknősbéka volt, ez már nincs ott, s így Achilles sohasem érheti utól a teknősbékát. Szóval Zeno azt kívánta bebizonyítani, hogy a test nem pontoknak, az idő nem pillanatoknak és hogy a mozgás nem egyik pontról egy másikra való átmeneteknek az összege. Zeno tehát avval a gondolattal nem tudott megbarátkozni, a mellyel jelenlegi mathematikai tárgyalásainkban a mértani sornál ismerkedünk meg: hogy végtelen számú tagok igenis adhatnak bizonyos feltételek mellett véges összeget.

Pythagoras iskolájában szembetűnő az a hajlandóság, hogy a számokat a geometriával összekössék: igen sok számtani problémát geometriai ábrázolás segélyével oldottak meg, így pl., mint már tudjuk, a számtani sorok összegét. Igen valószínű, hogy az ú. n. figurális (poligonális és piramidális) számok fogalma már ebben az iskolában vette eredetét. Ezekkel kapcsolatban a testekkel is foglalkoztak, kiválóan a szabályos testekkel. Timaeos (szül. Lokriban a Kr. előtti 400. év körül) ezeket kozmikus testeknek nevezi, mert szerinte a világ, a kozmosz elemei ezekből állanak, még pedig: a tűz tetraëderekből, a levegő oktaëderekből, a víz ikosaëderekből, a föld pedig koczkákból. Miután pedig még egy ötödik alakulás is lehetséges: a pentagondodekaëder, úgy ez tekintendő a világegyetemet összefoglaló és jelképező alaknak. A szabályos testekről tudták azt, hogy azok gömbbe írhatók s valószínűleg azt is, hogy csak öt szabályos test lehetséges. A szabályos testek közül a koczkát geometriai harmoniának nevezték, mert csúcsainak száma (8), harmonikus középarányos lapjainak száma (6) és éleinek száma (12) között.

A pentagondodekaëder ismerete és a szabályos ötszög és pentagramm szerkesztése alapján azt következtethetjük, hogy az aranymetszés (sectio aurea, divina) szerkesztését is ismerték. Az aranymetszés feladata ugyanis az, hogy egy a vonalat úgy messünk két részre, x-re és $a-x$-re, hogy a nagyobb rész mértani középarányos legyen az egész vonal és a kisebb rész között:

$$a : x = x : (a - x).$$

Kimutatták, hogy a görög építészet virágkorából való műremekeknél, mint pl. az Akropolisz Parthenonjánál (Kr. e,. 438-ban befejezve) az alaprajz méreteiben, az oszlopok, a gerendázat részei és egymás közötti arányaiban mindig az aranymetszést alkalmazták. E korban és előtte nem is volt más iskola, mely az aranymetszés mathematikai tárgyalásával foglalkozhatott volna, mint éppen Pythagorasé.

Az eddigiekből látjuk már, mily jelentékeny az az anyag, melyet e kiváló iskola ismert; mennyi találékonyságot, mathematikai érzéket, elvszerűséget fedezünk fel eljárásában. Ehhez járul még az a sok probléma, eszme, kérdés, melyek anyagának tárgyalása folyamában felmerültek s melyek impulzust adtak ez iskola követőinek vagy elleneinek az azokkal való foglalkozásra. Így érthető meg, hogy a Pythagoras utáni korban miért halad annyira a mathematika, miért bontakozik ki a többi tudományból, miért támad egész versenygés a legkülönbözőbb mathematikai problemák megoldása körül és miért játszik a mathematika nemsokára oly kiváló szerepet nemcsak a tudományos életben, de egyáltalában az egész görög közműveltségben?

E korra nézve az is jellemző, hogy túl van a puszta anyaggyűjtésen és definíciók megállapításán, benne már felvetett kérdések, problemák megoldása, komplikált szerkesztések elvégzése a szereplő tényezők.

Budapest.

Baumgartner Alajos.