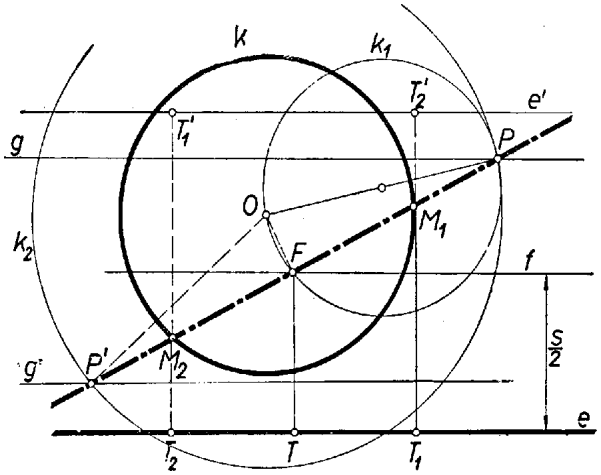
I. megoldás: Tekintsük a feladatot megoldottnak és tegyük fel, hogy M_1 és M_2 az e-nek ugyanazon partján van. Legyen az M_1M_2 húr felezőpontja F, továbbá M_1, M_2, F vetülete e-n rendre T_1, T_2, T.



Eszerint $M_1T_1 + M_2T_2 = s$, és így az $M_1M_2T_2T_1$ (konvex) trapéz FT középvonalának hossza, az F pont e-től való távolsága: $s/2$. Másrészt, ha k középpontja O, akkor OF merőleges a PM_1, azaz PF szelőre.

Így F-re két mértani helyet kaptunk: F rajta van az e-vel párhuzamos, tőle $s/2$ távolságra levő f egyenesek valamelyikén, másrészt az OP átmérő fölötti k_1 Thalész-körön. Ennek alapján F, és így a PF egyenes is megszerkeszthető.

Ha PF valóban metszi k-t, és a metszéspontok e ugyanazon partján adódnak, akkor a megoldás megfelelő volta a fentiekből nyilvánvaló. Ha viszont e szétválasztja M_1 és M_2-t, akkor a PF-et csak úgy tekinthetjük megoldásnak, ha az e-től mért távolságoknak előjelet tulajdonítunk. Ekkor természetesen azon az oldalon levő távolságokat kell pozitívnak vennünk, amelyiken az éppen vizsgált f van, mert $s/2$-t nyilván pozitívnak vettük.

f-re két lehetőség jön szóba e két oldalán, mindkettőnek 2 közös pontja lehet k_1-gyel, így a megoldások száma legfeljebb 4. – F gyanánt természetesen csak a k belsejében adódó metszéspontok felelnek meg.

Bácsy Zsolt (Budapest, Eötvös J. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás: Tovább is az I. megoldás jelöléseit használva tükrözzük P-t, e-t és az $M_1M_2T_2T_1$ derékszögű trapézt F-re. Így az M_1 és M_2 pontok egymás tükörképei, legyen továbbá P, T_1, T_2, e tükörképe P', T_1', T_2', e'. Nyilvánvaló, hogy T_1', T_2' az M_2T_2, ill. M_1T_1 meghosszabbítására esik, és $T_1T_2' = T_1M_1 + M_1T_2' = T_1M_1 + M_2T_2 = s$, és így e' az adatokból megszerkeszthető. Ugyanez áll P'-re is, mert ez egyrészt rajta van az O körül OP sugárral írt k_2 körön – ugyanis az OPP' háromszög OF súlyvonala merőleges PP'-re, tehát e háromszög egyenlő szárú –, másrészt ugyanakkora távolságban van e'-től, mint P az e-től.

Az utóbbi megállapítás alapján P'-re úgy kapjuk a második mértani helyet, hogy a P-n átmenő, e-vel párhuzamos g egyenest tükrözzük az e, e' síksáv tengelyére. – Ezek alapján a keresett szelőt a PP' egyenes adja meg.

e'-t és vele g'-t e két oldalán szerkeszthetjük, továbbá k_2 két pontban metszheti g'-t, így ismét azt kapjuk, hogy a megoldások száma legfeljebb $2 \cdot 2 = 4$.

Nováky Béla (Budapest, I. István Gimn. II. o. t.)

Megjegyzések. 1. A II. megoldás P' pontjának szerkesztése lényegében azonos az I. megoldásbeli F pont szerkesztésével. Ugyanis az e, e' síksáv tengelye az előbbi f egyenes, tehát g és g' távolsága kétszerese g és f távolságának, másrészt $P'P = 2FP$.

2. Láttuk, hogy akkor is megoldását kapjuk a feladatnak, ha M_1 és M_2 az e egyenes ellenkező oldalán van, – amennyiben az e-től való távolságot alkalmas módon előjeles mennyiségnek tekintjük. Többen rámutattak, hogy amennyiben viszont ezt nem tesszük, akkor az olyan megoldás keresése, amelyben M_1 és M_2 az e egyenes ellenkező oldalán van, negyedfokú egyenlet gyökei megszerkesztésének feladatára vezet. A nyert negyedfokú egyenletről azonban megmutatható az is, hogy gyökei általában nem szerkeszthetők meg körző és vonalzóval. Az ilyen megoldás tehát általában nem szerkeszthető meg.