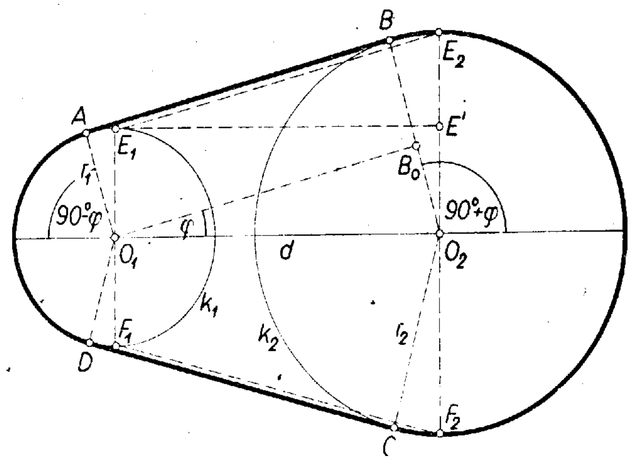
I. megoldás: Egyszerűsítésül a szíj szélességét és vastagságát nem vesszük figyelembe, vagyis a tárcsák és a szíj által alkotott rendszernek a tengelyekre merőleges síkon levő vetületét tekintjük. A tárcsák vetülete $2r_1 = 80$, $2r_2 = 200$ mm átmérőjű k_1 ill. k_2 kör, a középpontok O_1, O_2. A szíj vetülete pedig 4 részből áll: k_1 és k_2 közös érintőinek az érintési pontok közötti AB és CD szakaszaiból, továbbá a körök egymástól elfordított DA és BC ívéből. Aszerint, hogy a szíj egyenes szakaszai keresztezik egymást vagy nem, az AB és CD szakaszok a belső, ill. külső közös érintőkön vannak.



1. ábra

I. eset: nincs keresztezés. Legyen O_1 vetülete O_2B-n B_0 és $O_2O_1B_0\sphericalangle = \varphi$ (fokban mérve). Ekkor $O_2B_0 = r_2 - r_1 =$ 60 mm és a keresett $O_1O_2 = d$ távolság, valamint az érintőszakaszok hossza az $O_1O_2B_0$ derékszögű háromszögből (1. ábra)

$$(1) \qquad d = \frac{O_2B_0}{\sin\varphi}, \qquad DC = AB = O_1B_0 = O_2B_0 \text{ ctg } \varphi.$$

A szíjjal fedett DA és BC ívekhez tartozó középponti szög $180 - 2\varphi$, ill. $180 + 2\varphi$. Így a szíj ismert h hosszából φ-re a következő egyenletet kapjuk:

$$(2) \qquad \widehat{DA} + \widehat{BC} + 2\overline{AB} = 2r_1\pi\frac{180^\circ - 2\varphi}{360^\circ} + 2r_2\pi\frac{180^\circ + 2\varphi}{360^\circ} + 2(r_2 - r_1) \text{ ctg } \varphi = \mathrm{h},$$

ahonnan

$$\mathrm{ctg}\varphi = \frac{\mathrm{h} - (\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2)\pi}{2(\mathrm{r}_2 - \mathrm{r}_1)} - \frac{\pi}{180^\circ}\varphi,$$

és a számadatok alapján

$$(3) \qquad \text{ctg } \varphi = 8{,}834 - 0{,}01745\ \varphi.$$

(Előre gondolva arra, hogy négyjegyű táblázatot fogunk használni, $\pi \approx 3{,}142$-t vettünk, és a hányadosokból 4 értékes jegyet írtunk ki.) Vegyük észre, hogy (3) jobb oldalának 2-ik tagja éppen a φ szög ívmértéke, tehát ez a tag számítás nélkül ugyancsak közvetlenül kivehető a függvénytáblázatból.

(3)-at csak közelítőleg oldhatjuk meg, mert φ együtt lép fel egy trigonometrikus függvényével. Tekintettel arra, hogy φ együtthatója az állandó tagnak mintegy 500-ad része, első közelítésül vehetjük azt a φ_1 szöget, amelyre

$$\text{ctg } \varphi_1 = 8{,}834,$$
$$\text{azaz } \varphi_1 \approx 6{,}46^\circ.$$

A jobb oldal így elhanyagolt tagja negatív, tehát ctg φ kisebb ctg φ_1-nél, és ezért φ nagyobb φ_1-nél. A 2-ik tag értéke φ_1 mellett $-0{,}113$. A kotangens függvény ekkora változása φ_1 környezetében kb. $0{,}1^\circ$-kal növeli a szöget, ezért 2-ik és 3-ik közelítő értéknek $\varphi_2 = 6{,}5^\circ$, ill. $\varphi_3 = 6{,}6^\circ$-ot véve (3) bal és jobb oldalának értéke

$$\varphi_2\text{−vel}: 8{,}777 \text{ és } 8{,}721, \quad \text{ill.} \quad \varphi_3\text{−mal}: 8{,}643 \text{ és } 8{,}719,$$

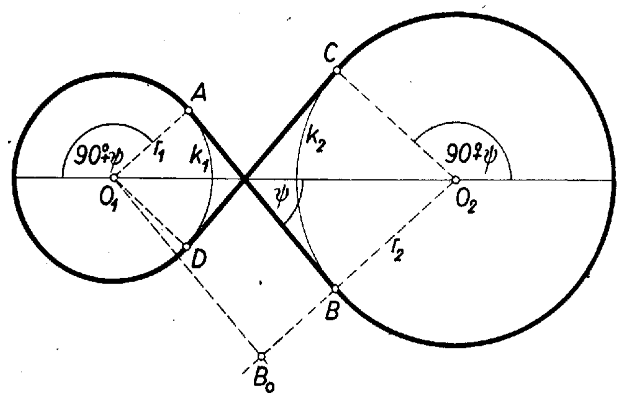
vagyis a bal oldal 0,056 többletet, ill. 0,076 hiányt mutat. Ezek szerint (3) gyöke φ_2 és φ_3 között van, valamivel közelebb φ_2-höz. $\varphi_4 = 6{,}54^\circ$ mellett (3) két oldalának eltérése már csak $8{,}723 - 8{,}720 = 0{,}003$. Viszont $\varphi_5 = 6{,}55^\circ$ és $\varphi_6 = 6{,}53^\circ$ mellett a jobb oldal ismét 8,720, a bal oldal pedig 8,710, ill. 8,737 vagyis az eltérés nagyobb és ellentétes irányú.

További – a fok ezredrészének meghatározását célzó finomítás táblázatunk alapján nem lehetséges, mert az ehhez szükséges lineáris interpoláció a kotangens-táblázat használt szakaszán a szokásosnál nagyobb hibával járna. Ugyanis 6° sorában a $0{,}1^\circ$-onkénti csökkenések rendre:

$$0{,}157,\quad 0{,}152,\quad 0{,}147,\quad 0{,}143,\quad 0{,}138,\quad 0{,}134,\quad 0{,}130,\quad 0{,}127,\quad 0{,}122,\quad 0{,}120,$$

elég gyorsan változnak – a sor elejétől a végéig mintegy 20%-kal –, ennélfogva a kotangens függvény grafikonja itt erősen görbül. A közbülső értékek pontosabb megállapítására viszont a lineáris interpolációnál pontosabb eljárást nem ismerünk. Eszerint (3) gyöke gyanánt a $\varphi=\varphi_4=6{,}54^\circ$ értéket kell elfogadnunk.

Most már (1) alapján φ_4-gyel $d=527$ mm. És mivel φ_5 és φ_6-tal d-re 526, ill. 528 mm adódnék, vagyis csak 1 mm-rel eltérő érték, azért eredményünk megfelel a kívánt pontosságnak.



2. ábra

II. eset. Ha a szíj egyenes szakaszai keresztezik egymást, akkor a fenti O_2B_0 értéke $r_2+r_1=140$ mm, továbbá (1) érvényes marad (2. ábra). A szíjjal fedett DA és BC ívek mindegyikéhez, φ helyett ψ jelöléssel, $180^\circ+2\psi$, középponti szög tartozik, (2) helyére a

$$(2')\qquad 2(r_1+r_2)\left(\pi\frac{180^\circ+2\psi}{360^\circ}+\operatorname{ctg}\psi\right)=h$$

egyenlet, (3) helyére pedig a

$$(3')\qquad \operatorname{ctg}\psi=3{,}786-0{,}01745\psi$$

egyenlet lép. Innen a fentiekhez hasonlóan

$$\operatorname{ctg}\psi_1=3{,}786,\qquad \psi_1\approx 14{,}8^\circ,$$

és a keresett ψ érték ismét nagyobb ψ_1-nél.

(3') elhanyagolt tagja ψ_1 mellett $-0{,}258$. A kotangens függvény ekkora változása ψ_1, környezetében kb. 1° növekedésre áll be, legyen ezért $\psi_2=15{,}8^\circ$. Ekkor (3') két oldala 3,534, ill. 3,510. A bal oldal 0,024-nyi többletét a szög újabb $0{,}1^\circ$-kal való növelésével majdnem eltüntethetjük:

$\psi_3=15{,}9^\circ$	mellett	$3{,}511-3{,}508=0{,}003$ többlet,
$\psi_4=16{,}0^\circ$	mellett pedig	$3{,}507-3{,}487=0{,}020$ hiány

mutatkozik. Ezekből $0{,}01^\circ$-nyi finomítással $\psi\approx 15{,}91^\circ$ adódik, evvel pedig a szíjtárcsák tengelyeinek távolsága (1) alapján $d=510$ mm.

Fritz József (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. Több versenyző (3) és (3')-t – vagy helyette a φ, ill. ψ-nek α, β pótszögére vonatkozó egyenletet – a következő ugyancsak helyes alakokban írta:

$$\varphi+\operatorname{ctg}\varphi=8{,}834,\qquad \psi+\operatorname{ctg}\psi=3{,}786,$$
$$-\alpha+\operatorname{tg}\alpha=7{,}264,\qquad -\beta+\operatorname{tg}\beta=2{,}216,$$

ahol a szögek ívmértékben értendők. Fent amiatt maradtunk meg a fok egységben való számolás mellett, mert a trigonometriai táblázat kezelése így egyszerűbb.

Mivel a szíj körív és egyenes részekre oszlik, eleve látható, hogy a kérdésre csak valamiféle próbálgató eljárás alapján válaszolhatunk. Erre utal a feladat kitűzésében a pontosság megszabása is. – A próbálgatást a következő megoldás a szíjrészek keresztezés nélküli illesztése esetére egyenlet felállítása nélkül végzi.

II. megoldás: Tekintsük köreinknek az O_1O_2 centrálisra merőleges E_1F_1, E_2F_2 átmérőit (O_1E_1 és O_2E_2 egyirányú sugarak), és legyen E_1 vetülete O_2E_2-re E' (1. ábra). A szíj hosszát a körök egymástól elfordult E_1F_1 és F_2E_2 félkörívei és az F_1F_2, E_2E_1 szakaszok összegével helyettesítve hibát követünk el. Ez azonban nem lehet nagy, mert így az ívrészek összegét a kelleténél kisebbre, az egyenes részeket pedig nagyobbra vettük. Valóban, $r_2 > r_1$ és az E_1O_1A, E_2O_2B szögek egyenlősége folytán a görbe rész feléből mellőzött E_2B ív nagyobb a beiktatott E_1A ívnél, viszont az E_1E_2 szakasz nagyobb AB-nél, mert E_1E_2 merőleges vetülete egy egyenesre (tehát nem nagyobb nála) az O_1O_2 szakasz, viszont AB az O_1O_2 merőleges vetülete, és így az előbbi a kisebb.

Ezek szerint a szíj félhosszából a két negyedkörív összegét levonva közelítő értéket kapunk E_1E_2-re, ebből pedig $E'E_2 = 60$ mm figyelembevételével az E_1E_2E' derékszögű háromszög alapján $E_1E' = O_1O_2$-re. $\pi \approx 3{,}142-$del $\mathrm{E_1E_2} \approx$ 530,1 mm és $O_1O_2 \approx 526{,}7$ mm. Igyekezzünk most már úgy választ adni a kérdésre, hogy addig változtatjuk a két középpont távolságát, amíg az ebből kiszámítható szíjhosszúság egyenlő lesz az adott hosszúsággal.

O_1O_2-t 526,5 mm-nek véve – amely hossz éppen a határán van az 526 és 527 mm-re kerekítendő értékeknek – és mindenütt 4 értékes jegyre számítva egyrészt Pythagorász tétele alapján $AB = 523{,}1$ mm. Másrészt – a körök külső hasonlósági pontját S-sel jelölve (ezt az 1. ábrán mellőztük) – $SO_2 : O_1O_2 = r_2 : (r_2 - r_1)$ alapján $SO_2 = 877{,}5$, és így az SO_5B derékszögű háromszögből az E_2O_2B-vel egyenlő O_2SB szög $6{,}54^\circ$, tehát a kisebb DA és a nagyobb BC ív középponti szöge $166{,}9^\circ$, ill. $193{,}1^\circ$, hosszuk 116,5 ill. 337,0 mm. Ezek szerint így $116{,}5 + 337{,}0 + 2 \cdot 523{,}1 = 1499{,}7$ mm hosszú szíjra lenne szükség, ennélfogva O_1O_2-t igen kis mértékben nagyobbra kell vennünk.

Nyilvánvaló, hogy ha O_1O_2-t 1 mm-rel nagyobbra, 527,5 mm-nek vennénk – amely érték mm pontossággal már 528 mm-t is adhat –, akkor a szíj hossza kb. 2 mm-rel adódnék hosszabbnak; vagyis 1501,7 mm körüli értéknek. Mivel pedig ez több a kívántnál, azért a középpontok távolsága mm pontossággal 527 mm. (A becslést hasonló számítás igazolja.)

Györgyi János (Budapest, Kölcsey F. Gimn. IV. o. t.)

Marton Katalin (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn. IV. o. t.)