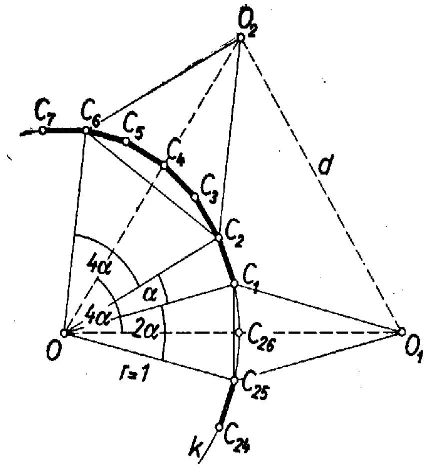
Legyen a két tükörkép O_1, O_2 és válasszuk k sugarát hosszúságegységnek. Ekkor a k-ba írt szabályos háromszög oldala $\sqrt{3}$, azt kell tehát bizonyítanunk, hogy $O_1O_2 = d = \sqrt{3}$. Jelöljük továbbá a szabályos 26-szög egy oldalának O-ból való $360^\circ/26 = 180^\circ/13$ látószögét röviden α-val.



Az $OC_{25}O_1C_1$ és $OC_2O_2C_6$ négyszögek nyilvánvalóan egységnyi oldalú rombuszok, ezért O_1 az OC_{26}, O_2 pedig az OC_4 félegyenesen van, tehát az O_1OO_2 szög egyenlő $C_{26}OC_4\sphericalangle = 4\alpha$-val. A rombuszok O-nál levő szöge 2α, ill. 4α, ezért $OO_1 = 2\cos\alpha$, $OO_2 = 2\cos 2\alpha$. Most már az OO_1O_2 háromszögből a koszinusz tétellel

$$O_1O_2^2 = OO_1^2 + OO_2^2 - 2OO_1 \cdot OO_2 \cos 4\alpha,$$
$$d^2 = 4\cos^2\alpha + 4\cos^2 2\alpha - 8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha.$$

Ezt az ismert $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$ azonosság felhasználásával írhatjuk így (a jobb oldalon a bizonyítandó $d^2 = 3$ állításra tekintettel különválasztjuk a 3 összeadandót):

$$d^2 = 2(1+\cos 2\alpha + 1 + \cos 4\alpha) - 8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha =$$
$$= 3 + 2\left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha\right) - 8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha. \tag{1}$$

Itt a jobb oldal harmadik tagja a 914. feladatban[1] bebizonyított

$$\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\ldots\cos 2^n\alpha = \frac{\sin 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\sin\alpha}$$

azonosság szerint ($n = 2$-t írva) egyenlő

$$-8\frac{\sin 2^3\alpha}{2^3\sin\alpha} = -\frac{\sin 8\alpha}{\sin\alpha}\text{-val.} \tag{2}$$

A zárójelbeli kifejezés értékét pedig az

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin\dfrac{2n+1}{2}x}{2\sin\dfrac{x}{2}}$$

azonosság alapján,[2] $x = 2\alpha$-val és $n = 2$-vel a

$$\frac{\sin 5\alpha}{2\sin\alpha} \tag{3}$$

hányados adja meg. Ha még figyelembe vesszük, hogy $13\alpha = 8\alpha + 5\alpha = 180^\circ$, és így $\sin 8\alpha = \sin 5\alpha$, akkor valóban

$$d^2 = 3 + \frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin 8\alpha}{\sin\alpha} = 3,$$

és ezt kellett bizonyítanunk.

Grüner György (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

[1] Lásd a megoldást K. M. L. XVIII. köt. 86. o. (1958. március), továbbá *Faragó László:* Mat. Szakköri Feladatgyűjtemény, 525. feladat (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1955. 52. o.

[2] Lásd az 1. jegyzetben idézett gyűjteményben, 527. feladat, 52. o.

Megjegyzések. I. Mindkét idézett azonosság legegyszerűbben a teljes indukció módszerével bizonyítható. Itt viszont mindkettőt $n=2$-vel alkalmaztuk, oly kicsi számmal, amelyre a bizonyítás közvetlenül is elvégezhető az ismert

$$2\cos x\sin y=\sin(x+y)-\sin(x-y) \quad \text{és}$$
$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

azonosságok alapján. Ugyanis $y=\alpha$-val és előbb $x=2\alpha$, majd $x=4\alpha$-val

$$2\cos 2\alpha\sin\alpha=\sin 3\alpha-\sin\alpha, \tag{4}$$
$$2\cos 4\alpha\sin\alpha=\sin 5\alpha-\sin 3\alpha, \tag{5}$$

ezeket összeadva és hozzáadva még $\sin\alpha$-t mindkét oldalhoz (1) második tagja céljára

$$\sin\alpha(1+\cos 2\alpha+\cos 4\alpha)=\sin 5\alpha,$$

ez pedig lényegében a (3) eredmény. Másrészt (1) harmadik tagja lépésről lépésre való alakítással

$$-4\cos\alpha(2\cos 2\alpha\cos 4\alpha)=-4\cos\alpha(\cos 6\alpha+\cos 2\alpha)=$$
$$=-2(2\cos 6\alpha\cos\alpha+2\cos 2\alpha\cos\alpha)=-2(\cos 7\alpha+\cos 5\alpha+\cos 3\alpha+\cos\alpha),$$

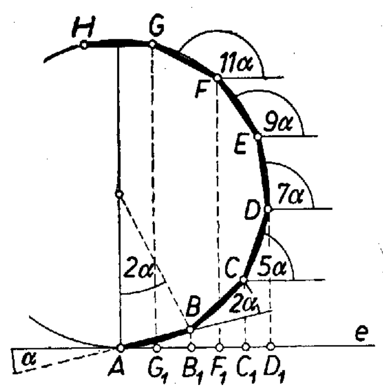
innen pedig a (4) és (5) mintájára képezett négy azonosság összeadásával (2)-re jutunk.

Kóta Gábor (Tatabánya, Árpád g. III. o. t.)

2. A fentieket továbbvíve a $\cos 2\alpha=\cos(13\alpha-11\alpha)=\cos(180^\circ-11\alpha)=-\cos 11\alpha$ és $\cos 4\alpha=-\cos 9\alpha$ egyenlőségek alapján (1) így is alakítható:

$$d^2=3+1-2(\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha+\cos 9\alpha+\cos 11\alpha),$$

elegendő tehát azt belátnunk, hogy a zárójelbeli kifejezés értéke 1/2. Tekintsük evégett egy egységnyi oldalú szabályos 13-szög hét egymás utáni oldalát – az ábrán az $ABCDEFGH$ nyitott poligont – és vetítsük merőlegesen a csúcsokat az A-n át HG-vel párhuzamosan haladó e egyenesre.



A 13-szög mindegyik külső szöge 2α, az AB oldal e-vel bezárt szöge α, így az egymás utáni $AB, BC, CD, \ldots, FG$ oldalak e-vel bezárt szöge rendre α, 3α, 5α, 7α, 9α, 11α (az utolsó három szög tompaszög). Ezért a zárójelbeli kifejezés tagjai az $AB, \ldots, FG$ oldalak irányított vetületét: $\overrightarrow{AB_1}, \ldots, \overrightarrow{F_1G_1}$ -et jelentik, pozitívnak véve az A-ból B_1-be, B vetületébe mutató irányt. Ennélfogva összegük

$$\overrightarrow{AB_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1D_1}+\overrightarrow{D_1E_1}+\overrightarrow{E_1F_1}+\overrightarrow{F_1G_1}=\overrightarrow{AG_1},$$

ez pedig valóban egyenlő 1/2-del, mert a 13-szög szimmetriája folytán az A-ban e-re emelt merőleges K-ban felezi GH-t, tehát $AG_1=KG$.

Marton Katalin (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

3. A feladat állítása a komplex számsíkon végzett számítással is bizonyítható, abból kiindulva, hogy a szabályos 26-szög csúcsainak a 26-ik egységgyökök képeit vesszük.[3]

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

Knuth Előd (Budapest, I. István g. III. o. t.)

4. Többen a szögfüggvény-táblázatok felhasználásával azt mutatták meg, hogy az állítás 3, vagy 4 értékes számjegynyi pontossággal igaz. E dolgozatokat hiányosnak minősítettük.

[3]A felhasznált módszereket lásd pl. a következő műben: *Reiman István:* Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon, Középiskolai Szakköri Füzetek. Tankönyvkiadó, 1957.