Második közlemény.

A következőkben a tetraäder köré írható gömb sugarát egy csúcsában összefutó három él s az általuk alkotott testszöglet elemeivel fogjuk kifejezni.

E végből legyenek az S csúcsban összefutó élek hosszúságának mértékszámai:

$$\overline{SA} = a,\ \overline{SB} = b,\ \overline{SC} = c;$$

az élek mellett fekvő lapszögek:

$$A,\ B,\ C$$

s a velük szembenfekvő élszögek:

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma.$$

Fektessünk az élek szabad végpontjaiban rájok merőleges síkokat. E síkok kivágják a megfelelő lapszögeket s egy pontban a körülírható gömbnek S-sel diametralis pontja és $\overline{SS'} = 2r$ a gömb keresett átmérője.

Az S' pontban találkozó síkok páronként oly egyenesekben vágják egymást, melyek a tetraäder megfelelő határlapjára merőlegesek. E merőlegesek talppontjai az illető határlapok köré írható köröknek S-sel diametralis pontjai. Legyenek e pontok $S_\alpha,\ S_\beta,\ S_\gamma$.

Múlt alkalommal e tárgyra vonatkozó közleményemben kimutattam, hogy az $SS'_\gamma AS_\beta$ stb. alakú négyszögekben, mint amelyekben két szemben fekvő szög derékszög áll:

$$(1)\qquad \overline{S_\beta S_\gamma} = \overline{S'A}\sin A,\ \overline{S_\gamma S_\alpha} = \overline{S'B}\sin B,\ \overline{S_\alpha S_\beta} = \overline{S'C}\sin C.$$

Ámde az $SAS_\gamma B$ stb. négyszögek szintén oly természetűek, hogy:

$$(2)\qquad \overline{AB} = \overline{SS_\gamma}\sin\gamma, \quad BC = \overline{SS_\alpha}\sin\alpha, \quad \overline{CA} = \overline{SS_\beta}\sin\beta$$

Másfelől azonban:

$$(3)\qquad \overline{S_\beta S_\gamma}^2 = \overline{AS_\gamma}^2 + \overline{AS_\beta}^2 - 2\overline{AS_\gamma}\cdot\overline{AS_\beta}\cdot\cos A$$

míg:

$$\overline{AS_\gamma} = \frac{b - a\cos\gamma}{\sin\gamma}, \quad \overline{AS_beta} = \frac{c - a\cos\beta}{\sin\beta}$$

úgy hogy:

$$\overline{S_\beta S_\gamma}^2 = \left(\frac{b - a\cos\gamma}{\sin\gamma}\right)^2 + \left(\frac{c - a\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2 - 2\cdot\frac{b - a\cos\gamma}{\sin\gamma}\frac{c - a\cos\beta}{\sin\beta}\cos A$$

mely értéknek az (1) egyenlőségnek elsejébe helyettezésével:

$$(1a.)\qquad \overline{SA}^2 = \frac{(b - a\cos\gamma)^2\sin^2\beta + (c - a\cos\beta)^2\sin^2\gamma - 2(b - a\cos\gamma)(c - a\cos\beta)\sin\beta\sin\gamma\cos A}{\sin^2 A\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

Ennek felhasználásával az $SS'A$ háromszögből:

$$4r^2 = \frac{a^2\sin^2 A\sin^2\beta\sin^2\gamma + (b - a\cos\gamma)^2\sin^2\beta + (c - a\cos\beta)^2\sin^2\gamma - 2(b - a\cos\gamma)(c - a\cos\beta)\sin\beta\sin\gamma\cos A}{\sin^2 A\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

Ha az egyenlőségben a jobb oldal számlálóját a gömháromszögtan megfelelő alapképlete segítségével kellően átalakítjuk, lesz:

$$(4)\qquad 4r^2 = \frac{a^2\sin^2\alpha + b^2\sin^2\beta + c^2\sin^2\gamma - 2ab\ \sin\alpha\ \sin\beta\ \cos C - 2ac\ \sin\alpha\ \sin\gamma\ \cos B - 2bc\sin\beta\ \sin\gamma\ \cos A}{\sin^2 A\sin^2\beta\sin^2\gamma}$$

Ez az eredményszámítás céljából még így is alakítható:

$$4r^2 = \frac{(a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma)^2 - 4\sin s[ab\sin(s-\gamma) + ac\sin(s-\beta) + bc\sin(s-\alpha)]}{4\sin s\sin(s-\alpha)\sin(s-\beta)\sin(s-\gamma)}$$

hol $s = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ stb. ismert rövid jelzések.

Ha a képletbe a tetraäder köbtartalmát be akarjuk vinni, a (4) egyenlőségnek számlálóját és nevezőjét $a^2b^2c^2$-vel sokszorozzuk s tekintetbe véve, hogy akkor:

$$bc\sin\alpha = 2t_\alpha, \quad ac\sin\beta = 2t_\beta, \quad ab\sin\gamma = 2t_\gamma, \quad \text{míg:}$$

$$a^2b^2c^2\ \sin^2 A\ \sin^2 B\ \sin^2\gamma = 36v^2,$$

azaz: a tetraäder 6-szoros köbtartalmának négyzete, a képlet így alakul:

$$4r^2 = \frac{a^4t_\alpha^2 + b^4t_\beta^2 + c^4t_\gamma^2 - 2a^2b^2t_\alpha t_\beta \cos C - 2a^2c^2t_\alpha t_\gamma \cos B - 2b^2c^2t_\beta t_\gamma \cos A}{9v^2}$$

Ha az (1) képletbe az él és lapszögek helyett a tetraäder éleit visszük be, az $a,\ b,\ c$-vel szemben fekvőket $a',\ b',\ c'$-tel jelölvén, tekintve, hogy

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc},\ \cos\beta = \frac{a^2+c^2-b'^2}{2ac},\ \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab},$$

tehát:

$$\sin^2\alpha = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a'^2)^2}{4b^2c^2}$$

stb. és

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos C = \cos\gamma - \cos\alpha\cdot\cos\beta$$

stb., a kellő összevonások után:

$$4r^2 = \frac{2a^2b^2a'^2b'^2 + 2a^2c^2a'^2c'^2 + 2b^2c^2b'^2c'^2 - a^4a'^4 - b^4b'^4 - c^4c'^4}{4a^2b^2c^2\sin^2\beta\ \sin^2\gamma\ \sin^2 A}$$

Ebben a kifejezésben a számláló:

$$4b^2c^2b'^2c'^2 - (b^2b'^2 + c^2c'^2 - a^2a'^2)^2$$

alakban írható, mely tényezőkre bontva:

$$(a'a+bb'+cc')(-aa'+bb'+cc')(aa'-bb'+cc')(aa'+bb'-cc')$$

alakot ölt, míg a nevező a köbtartalom tizenkétszeresének négyzete úgy, hogy végeredményben:

$$4r^2 = \frac{(a'a+bb'+cc')(-aa'+bb'+cc')(aa'-bb'+cc')(aa'+bb'-cc')}{(12V)^2}$$

A számláló a szemben fekvő élekből alkotható derékszögű parallelogrammák területeiből alakult 8-ad rendű térmennyiség s tekinthető oly háromszög területe 16-szoros négyzetének is, melyben az oldalak mértékszámai $aa',\ bb',\ cc'$.

E képletek inkább érdekes voltuknál fogva s gyakorlat céljából érdemelnek figyelmet, mert számításra a múlt alkalommal kifejtett alak határozottan használhatóbb.