Legyen az $A_1A_2A_3A_4$ tetraäder egy tetszés szerint vett éle. pl. $\overline{A_1A_2} = a$, ez él mellett fekvő lapszöge A, s az $A_1A_2A_3$ és $A_1A_4A_2$ lapokban a közös a éllel szembenfekvő élszögek $A_1A_3A_2 = \alpha$, illetőleg $A_1A_4A_2 = \alpha'$.

Fektessünk az $\overline{A_1A_2}$ él A felező pontjában rá merőleges síkot, mely geometriai helye mindazoknak a pontoknak, melyek A_1 és A_2 csúcsoktól egyenlő távolságban vannak. E sík kivágja az A lapszöget s keresztülmegy egyszersmind az $A_1A_2A_3$ és $A_1A_4A_2$ lapok köré írható körök középpontjain. Legyenek O_1 és O_2 az említett körök középpontjai, melyekben a lapjaikra emelt merőlegesek a keresett gömb O középpontjában találkoznak, mert e pont származásánál fogva, valamennyi csúcstól egyenlő távolságban van.

Az OAA_1 derékszögű háromszögből

$$\overline{OA_1}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AA_1}^2 \tag{1}$$

hol: $\overline{OA_1} = r$ a gömb keresett sugara:

$$\overline{AA_1} = \frac{a}{2}$$

föltétel szerint és OA az OO_2AO_1 négyszög köré írható kör átmérője, mert e négyszögnek O_2 és O_1-nél lévő szögei, származásuknál fogva derékszögek, minél fogva:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OO_2}^2 + \overline{O_2A}^2 = \overline{OO_1}^2 + \overline{O_1A}^2 \tag{2}$$

Bocsássunk O_2-ből O_1A-ra merőlegest, melynek talppontja H, és O-ból O_2H-ra egy másikat, melynek talppontja K. Látni való, hogy; $O_2KO\Delta \sim O_2HA\Delta$ és így: $OO_2K = A$, tehát:

$$\overline{OO_2} = \frac{\overline{OK}}{\sin A} = \frac{\overline{O_1H}}{\sin A}$$

Ámde $\overline{O_1H} = \overline{O_1A} - \overline{HA} = \overline{O_1A} - \overline{O_2A}\cos A$, mely érték helyettezésével

$$\overline{OO_2} = \frac{\overline{O_1A} - O_2A\cos A}{\sin A}$$

Ha ez értéket (2)-be tesszük és összevonunk:

$$\overline{OA}^2 = \frac{\overline{O_1A}^2 + \overline{O_2A}^2 - 2\overline{O_1A}\cdot\overline{O_2A}\ \cos A}{\sin^2 A} \tag{2a}$$

Ez értéket (1)-be téve és tekintve, hogy

$$\overline{O_1A} = \frac{a}{2}\cot\alpha,\ \overline{O_2A} = \frac{a}{2}\cot\alpha', \text{ered :}$$

$$r^2 = \frac{a^2}{4\sin^2 A}(\sin^2 A + \cot^2\alpha + \cot^2\alpha' - 2\cot\alpha\ \cot\alpha'\cos A) \tag{1a}$$

honnan:

$$r = \frac{a}{2\sin A}\sqrt{(\sin^2 A + \cot^2\alpha + \cot^2\alpha' - 2\cot\alpha\ \cot\alpha'\cos A)}.$$

a keresett gömbsugár meghatározására szolgáló képlet a felvett adatokból. Ez adatok természetesen nem határozzák meg a tetraädert, mert csak két egymást az "a" közös húrvégpontjaiban metsző gömbkört és lapjaik hajlásszögét tartalmazzák, tehát mindazon tetraäderek köré írható gömb sugarát adják, mely tatraäderek már két csúcsa e gömbkörök kerületében lehet.

A képlet nemcsak számításra, hanem szerkesztésre is alkalmas. E czélból kössük össze A_1 pontot O_1 és O_2-vel. Az összekötő egyenesek vágják a megfelelő köröket A_3' és A_4' pontokban.

A származott új tetraäderben már a él merőleges az $A_3'A_2A'$ lapra az elébbi adatok változatlanul maradván. és

$$A_2A_3' = a\cdot\cot\alpha \qquad \text{és} \qquad A_2A_4' = a\cdot\cot\alpha'$$

$$\overline{A_3'A_4'}^2 = a^2\cot^2\alpha + a^2\cot^2\alpha' - 2a^2\cot\alpha\ \cot\alpha'\cos A,$$

mely érték helyettezésével:

$$r^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + \frac{\overline{A_3'A_4'}^2}{\sin^2 A}\right)$$

Ha most $A_3'A_4'$-et A_2 pontban a $A_3'A_2A_4'$ síkjához AA_3'-re merőlegesen felrakjuk szabad végpontján át A_2A_4-tel párhuzamost húzunk, ennek A_2A_4'-tel való metszéspontja oly X pont, melynek A_1-gyel való összeköttetése

$$\overline{A'X} = 2r.$$

Egyéb iránt a szerkesztés (1) alapján is eszközölhető.

A $(2a)$ egyenlőségből kitűnik, hogy az elébbiekben említett OO_2A_1O négyszögnek s így mindazoknak, melyeknek két szemben fekvő szöge derékszög, átlói közt ez összefüggés áll:

$$\overline{O_1O_2} = \overline{OA}\ \sin A,$$

mert $(2a)$ a jobb oldalán a számláló tényleg:

$$\overline{O_1O_2}^2 = \overline{O_1A}^2 + \overline{O_2A}^2 - 2\ \overline{O_1A} \cdot \overline{O_2A}\ \cos A.$$

Maksay Zsigmond.