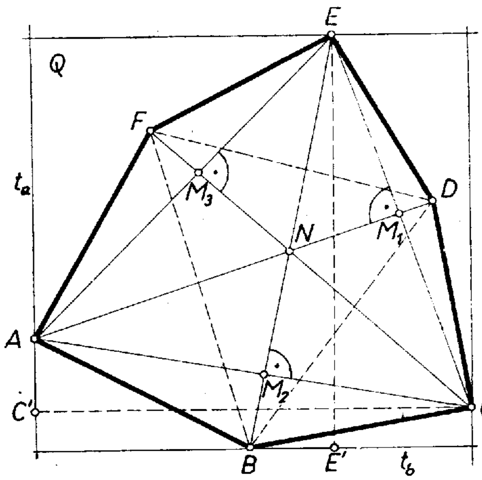
Az $ABCDEF = H$ hatszög csúcsai a feltételben szereplő szakaszpárok végpontjai között kétféle szerepet játszanak: A, C és E 3-szor lép fel, B, D, és F viszont 1-szer. A 3-ik szakaszpár úgy áll elő az elsőből, és a 2-ik a 3-ikból, hogy minden végpont helyére a H körüljárása mentén rákövetkező második pontot írjuk; ezért egyrészt A C, E, másrészt D, E, F egymás között egyenrangúak. Ez az észrevétel bizonyításunkban rövidítéseket tesz lehetővé.



Megmutatjuk, hogy H-nak A, C, E-ben levő szöge derékszög. Ezt elég pl. A-ra bebizonyítani. Az $EAB = T_1$ és $CFA = T_2$ háromszögek egybevágók (azok a csúcsok felelnek meg egymásnak, amelyeknek a felsorolásbeli sorszáma egyenlő). Ugyanis az E-ben, ill. C-ben összefutó oldalaik a feltevés szerint páronként egyenlők, és a köztük levő szög is mindkettőben ugyanakkora, mert merőleges szárú hegyes szögek. Valóban, mindkét szög kisebb derékszögnél, mert az EA és CF, az EB és CA, a BE és CF átlópárok M_3, ill. M_2, ill. N metszéspontja H konvexsége folytán benne van H-ban, ezért az AEB szög azonos az M_3EN szöggel, és az FCA szög az NCM_2 szöggel, az utóbbi szögek pedig az M_3EN, NCM_2 derékszögű háromszögnek a derékszögtől különböző szögei. Ebből következik, hogy T_1 és T_2 körüljárása megegyező, egymással a síkjukban végzett mozgatással hozhatók fedésbe. És mivel a feltételben szereplő oldalpárjaik egymásba $90°$-os forgatással átvihetők, azért ugyanez áll harmadik oldalaikra, AB és FA-ra is. Másképpen: az FAB háromszög A-nál derékszögű és egyenlő szárú. (Könnyű belátni, hogy a forgatás középpontja a BF szakasz felezőpontja.)

Ugyanígy a BCD és DEF is egyenlő szárú derékszögű háromszögek. Ezért a B, D, F-nél levő szögek mindegyike tompaszög, mert $2 \cdot 45° = 90°$-kal nagyobb a BDF háromszög megfelelő szögénél, másrészt H konvexsége folytán (valóságos hatszögben) kisebb $180°$-nál. Az ABC szög $ABE \equiv ABM_2$ és $EBC \equiv M_2BC$ rész szögei azonban hegyes szögek, mert az ABM_2, és M_2BC derékszögű háromszögekben a derékszög M_2-nél van. Ugyanez áll a D és F-nél levő szögek DA, ill. FC két oldalán levő részeire.

Az A, C, E csúcsok H minden Q támasz téglalapjának kerületi pontjai, mert ha pl. a BAF derékszög csúcsán át párhuzamosokat húzunk Q oldalaival, akkor vagy egyikük kettévágja a BAF szögtartományt, és így a rá merőleges egyenes támaszegyenese H-nak, vagy egybeesnek AB és AF-fel, és így A a Q-nak csúcsa. Ekkor B és F is Q kerületén van. – Másrészt a B, D, F csúcsok közül legalább egy Q kerületén van, mert ha A, C, E mindegyikében a támasz egyenes különböző H oldalaitól, ezek Q-nak csak három oldalát adják meg. – Viszont B, D, F közül legfeljebb kettő lehet a kerületen és nyilvánvaló, hogy ilyenkor a H-nak köztük levő csúcsa egyben Q-nak is csúcsa. – B, D, F mindegyike csak akkor lehetne Q kerületén, ha egyikükben H-nak $180°$-os szöge volna.

Az eddigiek szerint elég H azon támasz téglalapjairól megmutatnunk, hogy származtató támasz sávjaik szélessége egyenlő, amelyek kerületén legalább a C, E, A és B csúcsok rajta vannak. H körüljárásából nyilvánvaló, hogy e téglalapokban B és E, valamint A és C egy-egy szemben fekvő oldalpáron vannak. Ha már most Q két oldala merőleges BE-re, akkor a másik kettő merőleges AC-re, így a Q-t meghatározó két támaszsáv szélessége BE, ill. AC, és ezek egyenlősége folytán Q négyzet. Ha pedig E-nek, C-nek a B-beli t_b, ill. az A-beli t_a támaszegyenesen levő E', ill. C' vetülete B-től, A-tól különböző, akkor a sávok szélessége EE', ill. CC', és ezek egyenlők, mert a BEE' és ACC' egybevágó derékszögű háromszögeknek megfelelő befogói (ezekben az átfogók és az E-nél, C-nél levő merőleges szárú hegyesszögek egyenlők).

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Györgyi János (Budapest, Kölcsey F. g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Az FAB, BCD és DEF háromszögek derékszögű egyenlő szárú volta a 957. feladat II. megoldásához fűzött megjegyzés tételéből is következik, ugyanis a feltevések folytán B, D, F az EAC háromszögből úgy származtathatók, hogy a magasság vonalakra a csúcsoktól a szemben fekvő oldal felé felmérjük a szemben levő oldal hosszát.

Gazsi Lajos (Kaposvár, Táncsics M. g. IV. o. t.)