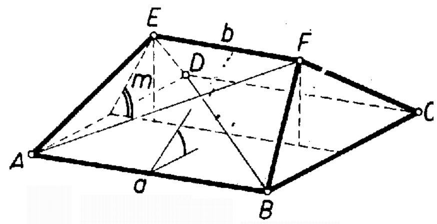
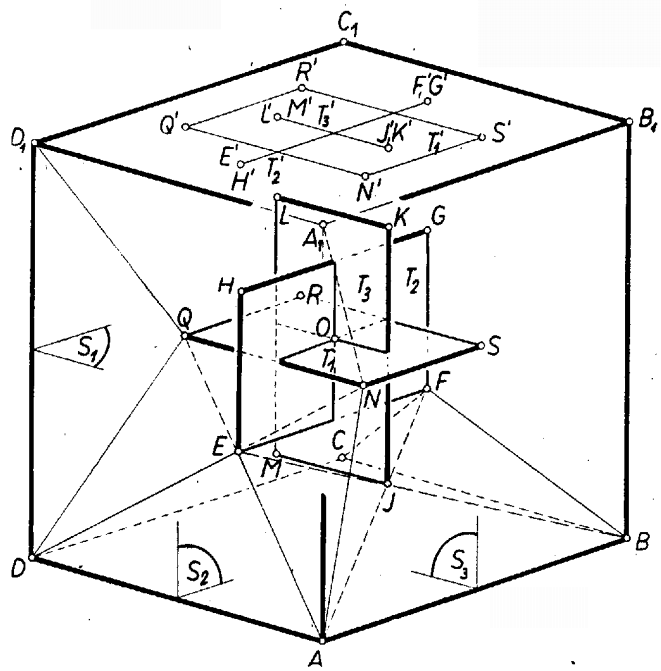
A szóban forgó P poliéder háztető alakjára tekintettel nevezzük az $EF = b$ élt röviden P gerincének (1. ábra).



1. ábra

Az a és b élek között – az idézett versenyfeladat megoldása szerint – az $ab + b^2 = a^2$ összefüggés áll fenn, eszerint $b = a(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0{,}618a$; a gerincnek a négyzetlaptól való m távolságára pedig $m^2 = a(a - b)/4$, vagyis az előbbi összefüggés alapján $m = b/2 \approx 0{,}309a$. – Nyilvánvaló, hogy P-nek két szimmetriasíkja van: a BC és az AB él felező merőleges síkja, az előbbi magában foglalja a gerincet.



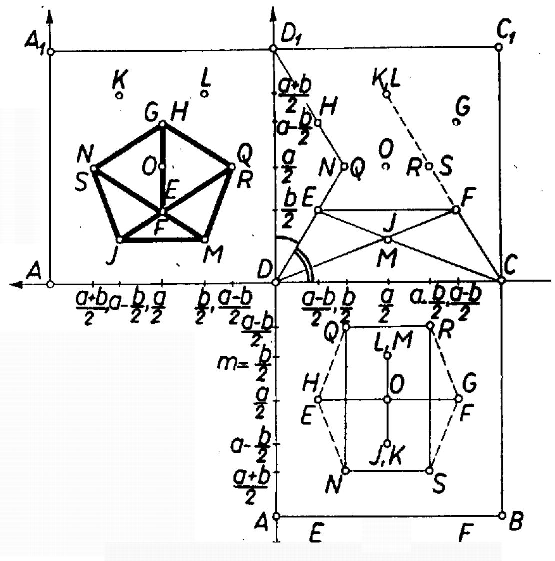
2. ábra

Legyen a kocka alap- és fedőlapja $ABCD$ és $A_1B_1C_1D_1$ és legyenek $AA_1, \ldots, DD_1$, a párhuzamos oldalélek. Legyen az alap- és a fedőlapra állított P_a, P_f poliéder pár EF, ill. GH gerince párhuzamos a kocka AB élével (2. ábra), az ABB_1A_1 elő- és a DCC_1D_1 hátlapra illesztett poliéderek JK, ill. LM gerince párhuzamos AA_1-gyel, végül az ADD_1A_1 bal és a BCC_1B_1 jobb oldallapra illesztett poliéderek NQ, ill. RS gerince párhuzamos AD-vel. Ekkor bármelyik szomszédos kockalap párra illesztett poliéder-pár gerincei merőlegesek egymásra, megfelelnek a követelménynek. Továbbá a párhuzamos gerincpárok benne vannak a kocka azon S_2, S_3, ill. S_1 szimmetriasíkjában, amelyek merőlegesen felezik az AD-vel, AB-vel, ill. AA_1-gyel párhuzamos éleket.

Így a leírandó I test 12 csúcsa 3 jól áttekinthető csoportba osztható: a párhuzamos gerincpárok $4 - 4$ végpontja egy-egy téglalapot határoz meg. Valóban, pl. az S_2-ben fekvő $EFGH = T_2$ négyszög paralelogramma, mert $EF \# GH$, továbbá szögei derékszögek, mert P_a és P_f beállításuknál fogva egymás tükörképei S_1-re, ezért EH és FG párhuzamosak AA_1-gyel, merőlegesek AB-re, és így EF-re is. Hasonlóan adódik, hogy a $JKLM = T_3$ és az $NQRS = T_1$ négyszögek ugyancsak téglalapok. Ezek szerint az I poliéder a kocka S_1, S_2, S_3 szimmetriasíkjai mindegyikére tükrös. – Másrészt a három téglalap egybevágó, mert két-két oldaluk gerinc, a másik kettő pedig két párhuzamos gerinc távolsága: $a - 2m = a - b$. Az utóbbi a kisebb oldal, mert az idézett eredmény szerint $b > a/2$.

Nyilvánvaló továbbá, hogy mindhárom téglalap középpontja azonos a kocka O középpontjával; tehát ettől mind a 12 csúcs egyenlő távolságra van, I köré O középponttal gömb írható.

Tekintsük I csúcsainak a kocka D-ben összefutó lapjaira való vetületét. Ezeket – az oldallapot DD_1 körül a hátlap síkjába, majd a hátlappal együtt DC körül az alaplap síkjába forgatva mutatja a 3. ábra, a vetületeket ugyanúgy jelöltük, mint magukat a pontokat (a fedőlapon levő vetületeket a 2. ábra mutatja.)



3. ábra

Az alapsíkon T_1 vetülete valódi nagyságban látszik, T_2 és T_3 vetülete pedig egyenes szakasz, $2-2$ csúcsuk vetülete egybeesik, pl. E, H, ill. J, K, így a 12 csúcs vetülete 8 pont. T_1 vetülete magában foglalja T_3 vetületét, ugyanis az utóbbi a T_1-nek b hosszúságú tengelyébe eső, O vetületére szimmetrikus, $a-b$ hosszúságú szakasz. T_2 vetülete viszont kinyúlik T_1 vetületéből, mert hossza b és ez a T_1-nek $a-b$ hosszúságú tengelyére esik. Hasonló megállapításokat tehetünk I csúcsainak a kocka hátlapján és oldallapján levő vetületeiről.

Így az I poliéder mindhárom vetületének körvonala (kontúrja) két szimmetria-tengellyel bíró hatszög, melynek két szemben fekvő csúcsa két-két testcsúcs egybeeső vetülete.

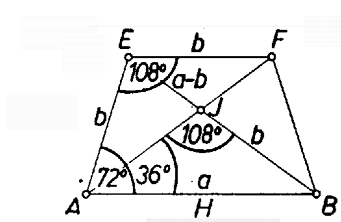
I konvexségéből és az alapsíkon levő vetületből következik, hogy az alapsíkra merőleges EHN síkban I-nek határlapja van, mert az E, H, N pontok vetületei beletartoznak a vetület körvonalába és I minden csúcsának vetülete az E, H, N pontok vetületével meghatározott egyenes egyik oldalán fekszik. Ez a határlap az EHN háromszög, mert I egy további csúcsának vetülete sem esik az EHN vetületére. Hasonlóan látható be a három vetületből, hogy az

$$EHQ,\ FGR,\ FGS;\quad JME,\ JMF,\ KLG,\ KLH;\quad NSJ,\ NSK,\ QRL,\ QRM$$

háromszögek I-nek lapjai.

Ezek azt is jelentik, hogy e háromszögek oldalai I-nek élei. Így pl. az E csúcsot legalább a H, N, Q, J, M csúcsokkal kötik össze élek. Megmutatjuk, hogy ennek az 5 élnek a közös hossza $EH=a-b$.

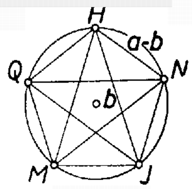
A P poliédernek az idézett versenyfeladat szerint meghatározó tulajdonsága, hogy egyenlő szárú trapéz és egyenlő szárú háromszög lapjának a négyzetlappal alkotott szögei pótszögek (1. ábra egy- és két íves szöge). Ezért két szomszédos kockalapra állított P-nek egy-egy lapsíkja egybeesik, pl. a P_a-beli $ABFE$ trapézlap és a P_e-beli ABJ háromszöglap. Másrészt a 951. feladatban bebizonyítottuk, hogy egy trapézlap és egy háromszöglap alkalmas összeillesztésben szabályos ötszöget ad. Ebből következik, hogy a háromszögnek az alapon fekvő szögei 36°-osak (4. ábra), ugyanekkora szögeket zárnak be a trapéz átlói a párhuzamos oldalakkal, és az átlók egymást b és $a-b$ hosszúságú részekre osztják.



4. ábra

Ezek szerint J az $ABFE$ trapéz AF és BE átlóinak metszéspontjában van és $EJ=a-b$. Az I szimmetriája folytán ugyanekkora EM is. Ugyanezen meggondolást P_a és P_b-re alkalmazva $EN=EQ=a-b$.

Megmutatjuk, hogy E-ből nem indul ki más él. Az E-ből kiinduló, vizsgált öt él egyenlősége azt jelenti, hogy az élek H, N, J, M, Q végpontjai az E középpont körüli $a-b$ sugarú gömbön vannak. Ez a gömb az I köré írt gömböt körben metszi, ami síkidom, tehát az öt végpont egy síkban van. – A fentiekhez hasonlóan látható be, hogy a HN, NJ, JM, MQ, QH, szakaszok hossza ugyancsak $a-b$, ezért a $HNJMQ$ síkidom körbe írható egyenlő oldalú ötszög (5. ábra), vagyis szabályos ötszög.



5. ábra

Ezért a HJ, NM, JQ, MH és $QN = b$ átlók e szabályos ötszögnek, és így I-nek is a belsejében vannak, I-nek a konvexség folytán nem élei. Most már, mivel ugyanígy H, N, J, M, Q mindegyikéből $5-5$ él indul ki, és ezek végpontjai $1-1$ szabályos ötszöget határoznak meg, és ezekben az EF, ER, EL, EK, ES szakaszok átlók, azért nem élei I-nek. Végül EG sem éle I-nek, mert a körülírt gömbnek átmérője. Így E-ből valóban csak az említett 5 él indul ki.

Ezek az élek a $HNJMQ$ ötszög $a-b$ hosszúságú oldalaival szabályos háromszögeket alkotnak, tehát I-nek E-ben öt ilyen lapja fut össze.

Ugyanez áll I minden csúcsára, mert I előállításában mind a hat P egyenlő szerepet játszott, ezért I minden éle egyenlő, minden lapja szabályos háromszög. Ezek alapján az élek száma $12\cdot 5/2 = 30$ (a $12\cdot 5$ szorzatban minden él mindkét végpontjánál figyelembe van véve, ezért osztunk 2-vel). A lapok száma pedig hasonlóan $12\cdot 5/3 = 20$.

Mindezek szerint az I poliéder ún. *szabályos ikozaéder* (húszlapú test).

Knuth Előd (Budapest, I. István Gimn. III. o. t.)

Megjegyzés. Számítással is meg lehet mutatni, hogy az I-t meghatározó 12 csúcsból képezett bármely pár egymástól való távolságai között csak 3-féle hosszúság lép fel: $a-b$, b és a T téglalapok átlói (az utóbbiak nyilván nem lehetnek élek). Ugyanis a P méreteire idézett eredmények alapján a és b-vel kifejezhetjük bármely csúcsnak pl. a kocka D-ben összefutó lapjaitól való távolságát. Ezek a 2. ábra D-ből C, A, D_1 felé mutató „tengelyein" láthatók. Ezek alapján pl. az EK távolságot azon téglatest testátlójaként számíthatjuk ki, melynek két csúcsa E, K, és lapjai párhuzamosak a kocka lapjaival. E téglatest DC irányú szélessége, DA irányú kiterjedése és DD_1, irányú magassága, mint E és K megfelelő távolságainak különbsége (abszolút értékben véve) rendre a következő:

$$\frac{a}{2}-\frac{a-b}{2}=\frac{b}{2},\qquad \frac{a}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-b}{2},\qquad \frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a}{2},$$

és így az EK testátló négyzete, a megoldás elején idézett összefüggések alapján

$$\frac{1}{4}[a^2+b^2+(a-b)^2]=\frac{1}{2}[(a^2-ab)+b'^2]=\frac{1}{2}(b^2+b^2)=b^2,$$

és így $EK = b$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}EJ^2 &= \left(\frac{a}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(a-\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)^2=\\ &=\frac{1}{4}[b^2+(a^2-2ab+b^2)+(4b^2-4ab+a^2)]=\\ &=\frac{1}{2}[(a^2-3ab+2b^2)+b^2]=\frac{1}{2}[(a^2-3ab+2b^2)+(a^2-ab)]=\\ &=a^2-2ab+b^2=(a-b)^2,\end{aligned}$$

és így $EJ = a-b$.

Gagyi Pálffy András (Budapest, Széchenyi I. g. III. o. t.)