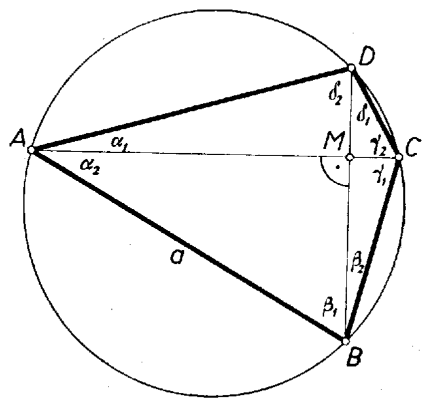
A négytagú számtani sorozat két szélső és két közbülső tagjának összege egyenlő:

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta, \tag{1}$$

eszerint négyszögünk húrnégyszög. Legyenek másrészt az átlókkal kettévágott szögek részei rendre $DAC = \alpha_1$, $CAB = \alpha_2$, $ABD = \beta_1$, $DBC = \beta_2$, $BCA = \gamma_1$, $ACD = \gamma_2$, $CDB = \delta_1$, $BDA = \delta_2$.



Így, mivel háromtagú számtani sorozat összege egyenlő a középső tag háromszorosával, az ABD háromszögből $\beta_1 = 60°$. A négyszög körbe írható volta és az átlók merőlegessége folytán $\gamma_2 = 60°$, $\delta_1 = \alpha_2 = 30°$, továbbá $\beta_2 = \alpha_1$. Ezért a négytagú sorozat különbsége $\varepsilon = \beta - \alpha = (\beta_1 + \beta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2) = 60° - 30° + (\beta_2 - \alpha_1) = 30°$, tehát (1)-re és a négyszög szögeinek összegére tekintettel $\alpha + \gamma = \alpha + (\alpha + 3) = 2\alpha + 90° = 180°$-ból $\alpha = 45°$, $\beta = 75°$, $\delta = 105°$, $\gamma = 135°$, továbbá $\alpha_1 = \beta_2 = 15°$, $\gamma_1 = \delta_2 = 75°$. Ezek szerint az ABC háromszög egyenlő szárú, $AC = AB = 1$.

Most már a szinusz-tétel ismételt alkalmazásával a további oldalak és átló

az ABC	háromszögből	$BC = \sin 30° : \sin 75°$	$\approx 0{,}5176$;
„ ABD	„	$AD = \sin 60° : \sin 75°$	$\approx 0{,}8966$;
„ ABD	„	$BD = \sin 45° : \sin 75°$	$\approx 0{,}7321$;
„ ACD	„	$CD = \sin 15° : \sin 105°$	$\approx 0{,}2679$ egység,

és végül az átlók merőlegessége folytán szorzatuk feléből a négyszög területe $t = BD/2 = 0{,}3660$ területegység.

Máté Zsolt (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha a szinusz függvény összeadási (addíciós) tétele alapján ismertnek tekintjük a

$$\sin 75° = \sin(45° + 30°) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad \text{és}$$
$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

értékeket, akkor eredményeinket a táblázat, vagyis tizedes alakú közelítő törtek használata nélkül, pontos, „zárt” alakban is felírhatjuk:

$$BC = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)/2, \qquad AD = \left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)/2, \qquad BD = \sqrt{3} - 1,$$
$$CD = 2 - \sqrt{3} \qquad \text{és} \qquad t = \left(\sqrt{3} - 1\right)/2.$$

Fejes László (Makó, József A. g. IV. o. t.)

2. Ezekhez az eredményekhez trigonometriai ismeretek nélkül, csupán a Püthagorász-tétel ismételt alkalmazásával és némi ügyeskedéssel is eljuthatunk. Az átlók metszéspontját M-mel jelölve az ABM derékszögű háromszögből $BM = 1/2$, $AM = \sqrt{3}/2$. Így $MC = AC - AM = \left(2 - \sqrt{3}\right)/2$, és egyrészt a BCM derékszögű háromszögből

$$BC = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{7 - 4\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{6 - 2\sqrt{6 \cdot 2} + 2}{4}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2},$$

másrészt CDM-ből $CD = 2MC = 2 - \sqrt{3}$ és $MD = MC\sqrt{3} = \left(2\sqrt{3} - 3\right)/2$, ennélfogva $BD = BM + MD = \sqrt{3} - 1$. Végül DAM-ből

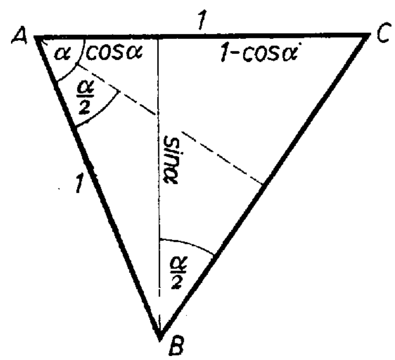
$$DA = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{21 - 12\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{18 - 2\sqrt{18 \cdot 6} + 6}{4}} = \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{2}.$$

Várady Gábor (Győr, Révai M. g. IV. o. t.)

3. Az előző megjegyzésnek az ABC háromszögre vonatkozó gondolatát bármely hegyes α szögre alkalmazva az értékes, de kevésbé ismert

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

összefüggéshez jutunk; ugyanis $BM=\sin\alpha$, $AM=\cos\alpha$, $CM=1-\cos\alpha$, továbbá $C\sphericalangle=(180^\circ-\alpha)\,2=90^\circ-\alpha/2$ és így $CBM\sphericalangle=\alpha/2$.



4. Néhány dolgozat az ABD háromszög 60°-os szögét A, vagy D-hez téve az $\alpha=60^\circ$, $\beta=80^\circ$, ill. $\alpha=67{,}5^\circ$, $\beta=82{,}5^\circ$ esetet is kidolgozta 2-ik, ill. 3-ik megoldásként. A szövegben azonban nem az áll, hogy az ABD háromszög szögei valamilyen sorrendben alkotnak számtani sorozatot, hanem hogy ez az *egymás utáni* szögekre, vagyis az A, B, D csúcsú szögre áll.