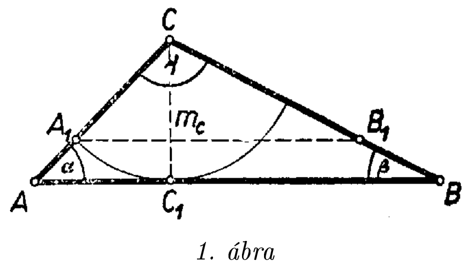
Az alkotórészek szokásos jelöléseivel a háromszög és a körcikk területe

$$t_1 = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}\frac{m_c}{\sin\beta}\cdot\frac{m_c}{\sin\alpha}\sin\gamma = \frac{m_c^2\sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta}, \quad \text{és} \quad t_2 = \frac{m_c^2\gamma}{2}$$

ahol t_2-ben γ abszolút mértékben (radiánban) értendő. Így a $t_2 = t_1/2$ követelményből ekvivalens átalakításokkal (ugyanis $\sin\alpha$ és $\sin\beta$ egyike sem 0)

$$2\gamma\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma. \tag{1}$$

I. Az I. feltételben említett derékszög megválasztására két különböző lehetőség van: vagy $\gamma = \pi/2$, vagy α és β közül az egyik, nem lényeges, hogy melyik.



1. ábra

1. eset. $\gamma = \pi/2$ esetén α és β pótszögek, ezért $\sin\beta = \cos\alpha$, tehát (1) így alakul:

$$\sin 2\alpha = 2/\pi, \quad \text{és innen} \quad \alpha \approx 19°46'.$$

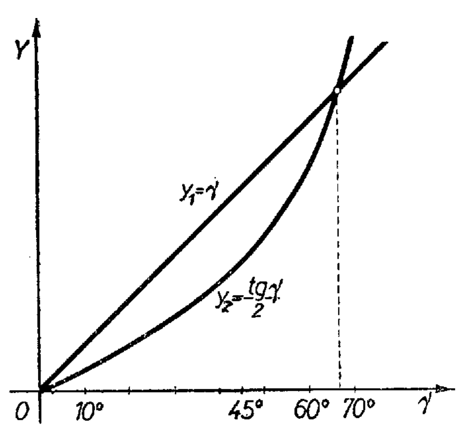
(A második megoldás ennek pótszöge, ugyanarra a háromszög alakra vezet.) A háromszög szögei:

$$\mathrm{I}_1: \quad 19°46', \quad 70°14', \quad 90°.$$

2. eset. $\alpha = \pi/2$ esetén β és γ pótszögek, $\sin\beta = \cos\gamma$, ezek alapján (1) így alakul:

$$\gamma = \frac{1}{2}\,\mathrm{tg}\,\gamma \tag{2}$$

Ennek az egyenletnek keressük hegyesszög megoldását. E célból ábrázoljuk a $0 < \gamma < \pi/2$ intervallumban az $y_1 = \gamma$ és $y_2 = (\mathrm{tg}\,\gamma)/2$ függvényeket (2. ábra).



2. ábra

Mindkettő grafikonja az origóból indul, az első meredekebben, mint a második. Az első vonal 45°-os egyenes, a második egyre erősebben növekszik és $\gamma = \pi/2$ közelében felvesz tetszőleges nagy értéket. Így a két vonalnak egy metszéspontja, tehát a (2) egyenletnek egy a feladatnak megfelelő megoldása van. Ezt a megoldást rendszeres próbálgatással határozzuk meg közelítőleg.

A grafikon szerint 67° körüli abszcisszánál van a két vonal metszéspontja, ezt vesszük első közelítő értéknek. A

$$\gamma_1 = 67° \approx 1{,}169 \text{ értéknél } 0{,}5\ \mathrm{tg}\,\gamma_1 \approx 1{,}178,$$

vagyis (2) jobb oldala nagyobb. Így a grafikonok figyelembevételével (2) gyöke 67°-nál kisebb lesz. Újabb közelítésül 0,5°-kal kisebb γ_2 szöget választva

$$\gamma_2 = 66{,}5° \approx 1{,}161, \qquad \text{itt} \qquad 0{,}5\ \mathrm{tg}\,\gamma_2 \approx 1{,}150 < \gamma_2,$$

tehát ennél nagyobb értéket kell keresnünk.

A „Függvénytáblázatok” szerint $y = \operatorname{tg} x$ a γ_2 és γ_1 között majdnem egyenletesen növekszik, ugyanis változása 0,1°-onkint

$$2{,}311 - 2{,}300 = 2{,}322 - 2{,}311 = 2{,}333 - 2{,}322 = 2{,}344 - 2{,}333 = 0{,}011$$

és

$$2{,}356 - 2{,}344 = 0{,}012.$$

Így grafikonjának e rövid szakasza alig tér el az egyenestől, ennek alapján a harmadik közelítő értéket kereshetjük a lineáris interpoláció visszafordításával, annál is inkább, mert percnyi pontosságra törekedve $\operatorname{tg}\gamma$ értékét is interpolációval kell képeznünk. Tekintsük (2) átrendezett alakja jobb és bal oldalának

$$\Delta = \operatorname{tg}\gamma - 2\gamma \tag{3}$$

különbségét. γ_2 esetében $\Delta_2 \approx 2{,}300 - 2{,}321 = -0{,}021$. Hasonlóan $\Delta_1 \approx 2{,}356 - 2{,}339 = +0{,}017$. Eszerint míg a szög γ_2-től γ_1-ig, vagyis $0°30'$-et nő, addig Δ növekedése $0{,}017 - (-0{,}021) = 0{,}038$. Mi azt keressük, mekkora δ értékkel növeljük γ_2-t, hogy $\Delta = 0$ legyen, vagyis $-0{,}021$-hez képest $0{,}021$-del növekedjék. Eszerint

$$\delta : 30' = 0{,}021 : 0{,}038, \quad \text{innen} \quad \delta \approx 17'.$$

Valóban a $\gamma_3 = \gamma_2 + \delta \approx 66°47' \approx 1{,}1656$ értékkel $\operatorname{tg}\gamma \approx 2\gamma \approx 2{,}331$. Eszerint ezen háromszög szögei:

$$\mathrm{I}_2: \quad \alpha = 90°, \quad \beta \approx 23°13', \quad \gamma \approx 66°47'.$$

II. A háromszög két szögének a II. követelményben szereplő egyenlősége ugyancsak kétféleképpen lehetséges: a kiemelt szerepet játszó γ különbözik a másik két szögtől, tehát $\alpha = \beta$, ill. egyikkel egyenlő, pl. $\alpha = \gamma$.

1. eset. $\alpha = \beta = (180° - \gamma)/2$ esetén $\sin\alpha = \sin\beta = \cos\gamma/2$, ezért (1) így alakítható

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\gamma}{4\sin\alpha\sin\beta} = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ez a $\gamma/2 = \varepsilon$ ismeretlenre a (2)-vel azonos egyenlet, tehát megoldása $\varepsilon \approx 66°47'$, és így a szögek:

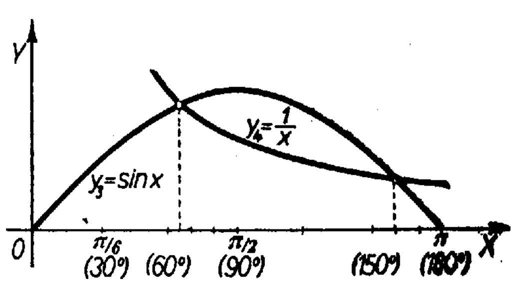
$$\mathrm{II}_1: \quad \gamma \approx 133°34', \quad \alpha = \beta \approx 23°13'.$$

(A fenti két egyenlet megfelelése az 1. ábra szemléletéből is nyilvánvaló, mert, ilyenkor CC_1 két egybevágó, C_1-nél derékszögű háromszögre vágja ABC-t, és így mindkettőben teljesülnie kell az I. 2. eset követelményeinek.)

2. eset. $\alpha = \gamma$ folytán $\beta = 180° - 2\gamma$, tehát (1)-ből $\sin\gamma \neq 0$ figyelembevételével majd $2\gamma = x$ jelöléssel

$$2\gamma\sin 2\gamma = 1, \qquad \text{ill.} \qquad \sin x = \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Itt tehát első közelítő értéket ismét két jól ismert grafikon: $y_3 = \sin x$ és $y_4 = 1/x$ metszéséből kereshetünk. γ hegyesszög, tehát y_3 számára a $0 < x < 180° = \pi$ intervallum jön szóba, y_4 számára viszont elég, ha $x \geq 1$, mert (4) bal oldala nem nagyobb 1-nél.



3. ábra

A 3. ábra szerint két metszéspont van: 64° és 160° körül. Ezeket a fentihez hasonlóan „kifinomítva” a megfelelő háromszögek szögei $x \approx 63°50'$-ből, ill. $x \approx 158°52'$-ből:

$$\mathrm{II}_{2,1}: \quad \gamma = \alpha \approx 31°55', \quad \beta \approx 116°10',$$
$$\mathrm{II}_{2,2}: \quad \gamma = \alpha \approx 79°26', \quad \beta \approx \ \ 21°\,8'.$$

III. A háromszög területét kétféleképpen felező vonalak hosszának összehasonlításához fejezzük ki t_1-et m_c-vel és c-vel, t_2-t pedig az m_c sugárral és az i ívvel:

$$2t_1 = m_c c, \quad 2t_2 = m_c i,$$

és így

$$t_2/t_1 = 1/2\text{-ből} \qquad i = c/2. \tag{5}$$

Legyen másrészt az ABC háromszög területét felező, az AB-vel párhuzamos szakasz A_1B_1. Így az A_1B_1C háromszög hasonló ABC-höz. Területét t_1'-vel jelölve a követelmény, illetőleg ismert tétel szerint

$$t_1' : t_1 = 1 : 2 \qquad \text{és} \qquad t_1' : t_1 = A_1B_1^2 : AB^2,$$

ennélfogva $A_1B_1 = AB/\sqrt{2} = c/\sqrt{2}$. Ezt (5)-tel összehasonlítva: $A_1B_1/i = \sqrt{2}$, vagyis a területet felező, AB-vel párhuzamos szakasz minden adódott háromszögben hosszabb az ívnél, elég jelentősen: annak több mint 40%-ával.

Nováky Antal (Budapest, I. István g. IV. o. t.)

Megjegyzés. Legutóbbi megállapításunk természetesen csak az olyan háromszögekre érvényes, amelyekben a területfelező ív középpontja az egyik csúcs, és az ív érinti a szemben fekvő oldalt.