I. megoldás: Az adott képezési szabállyal a sorozat első 7 tagja:

(1) $$2, \quad 3, \quad 5, \quad 17, \quad 33, \quad 65.$$

Tekintsük a szomszédos tagok különbségeiből álló sorozat így kiszámítható tagjait:

$$c_1 - c_0 = d_0 = 1, \quad c_2 - c_1 = d_1 = 2, \quad d_2 = 4, \quad d_3 = 8, \quad d_4 = 16, \quad d_5 = 32.$$

Ezek mértani sorozatot alkotnak, bármelyik (eddigi) két szomszédos különbség hányadosa 2. Ez bármely két szomszédos különbségre igaz, ugyanis

$$\frac{d_j}{d_{j-1}} = \frac{c_{j+1} - c_j}{c_j - c_{j-1}} = \frac{(3c_j - 2c_{j-1}) - c_j}{c_j - c_{j-1}} = \frac{2(c_j - c_{j-1})}{c_j - c_{j-1}} = 2,$$

és így $d_k = 2^k$.

Fejezzük ki c_k-t a d_j-k segítségével, ebből már remélhető a kívánt jellegű előállítás

$$\begin{gathered} c_k = (c_k - c_{k-1}) + c_{k-1} = (c_k - c_{k-1}) + (c_{k-1} - c_{k-2}) + c_{k-2} = \ldots = \\ = (c_k - c_{k-1}) + (c_{k-1} - c_{k-2}) + \ldots + (c_2 - c_1) + (c_1 - c_0) + c_0 = \\ = d_{k-1} + d_{k-2} + \ldots + d_1 + d_0 + c_0. \end{gathered}$$

Így a d_j-k talált kifejezését beírva (és az összeadandók sorrendjét megfordítva)

$$c_k = 2 + (1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1}) = 2 + \frac{2^k - 1}{2 - 1},$$

vagyis

(2) $$c_k = 2^k + 1.$$

Vegyük észre, hogy e kifejezés $k = 0$-ra és $k = 1$-re is érvényes.

Most már az első n tag összege:

$$\begin{gathered} S_n = c_0 + c_1 + \ldots + c_{n-1} = (2^0 + 1) + (2 + 1) + \ldots + (2^{n-1} + 1) = \\ = (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}) + n, \end{gathered}$$

(3) $$S_n = 2^n - 1 + n.$$

Az S_n, S_{n-1} és S_{n-2} közti összefüggés előállítása céljára (3)-ból, valamint (2)-ből $k = n$-nel

$$\begin{gathered} 2^n = c_n - 1 = S_n - n + 1, \quad \text{vagyis} \\ c_n = S_n - n + 2. \end{gathered}$$

Eszerint

$$\begin{gathered} c_{n-1} = S_{n-1} - (n - 1) + 2, \\ c_{n-2} = S_{n-2} - (n - 2) + 2. \end{gathered}$$

Ezeket az adott összefüggésbe helyettesítve

$$S_n - n + 2 = 3(S_{n-1} - n + 3) - 2(S_{n-2} - n + 4),$$

(4) $$S_n = 3S_{n-1} - 2S_{n-2} - 1.$$

Bach Katalin (Szeged, Rózsa F. g. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Ha már sejtjük a $c_k = 2^k + 1$ összefüggést, ez teljes indukcióval is bizonyítható: $k = 0$, 1-re érvényes az összefüggés, és ha $k - 1$, és $k - 2$ olyan számok, amelyekre $c_{k-1} = 2^{k-1} + 1$, $c_{k-2} = 2^{k-2} + 1$, akkor k is ilyen, mert

$$c_k = 3c_{k-1} - 2c_{k-2} = (2 + 1)(2^{k-1} + 1) - 2(2^{k-2} + 1) = 2^k + 1.$$

Hasonlóan lehet bizonyítani – ha már észrevettük – az (4) összefüggést.

Miklóssy Endre (Szolnok, Verseghy F. g. IV. o. t.)

2. A (4) összefüggést a következő meggondolással is megkaphatjuk. A (3) jobb oldalán álló 2^n, n tagokat ki kell fejeznünk S_{n-1}, S_{n-2}-vel. Evégett a (3)-ból n helyén $n - 1$ és $n - 2$-vel adódó egyenlőségeket:

$$n + \frac{2^n}{2} = S_{n-1} + 2, \qquad n + \frac{2^n}{4} = S_{n-2} + 3$$

alakban írva mint az n és 2^n „ismeretlenekre” fennálló egyenletrendszert megoldjuk:

$$n = -S_{n-1} + 2S_{n-2} + 4, \qquad 2^n = 4S_{n-1} - 4S_{n-2} - 4,$$

és a kapott kifejezéseket $S = n + 2^n - 1$-be behelyettesítjük.

3. A (4) összefüggés meglepően hasonlít a sorozat képezési utasítására. Ezt a (2) és (3) „zárt alakokkal” végzett számítás nélkül úgy is beláthatjuk, ha a

$$\begin{array}{rlll}
c_{n-1} = & 3c_{n-2} & -2c_{n-3} & \\
c_{n-2} = & 3c_{n-3} & -2c_{n-4} & \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\
c_2 = & 3c_1 & -2c_0 & \\
c_1 = & 3c_0 & & -3 \\
c_0 = & & & 2
\end{array}$$

egyenlőségeket oszloponként összeadjuk.

4. A dolgozatok nagy része gépies munkával S_n-nel azt az összeget jelölte, melynek legnagyobb indexű tagja c_n – holott ennek jele az adott szöveg szerint S_{n+1} – és következésképpen (3) helyett $S_n = 2^{n+1} + n$-et kaptak. Ezeket is elfogadtuk, megjegyezzük azonban, hogy körültekintő olvasónak különösen a „szokatlan” dolgokra – mint itt a sorozat 0-indexű tagjára, fel kell figyelnie. Még több az olyan dolgozat, amely nem tesz megjegyzést arról, hogy (3) nemcsak $k \geq 2$-re érvényes. (A (2)-t előállító meggondolásokban ugyanis felhasználták az adott összefüggést, amelynek $k = 0$ és 1-gyel nincs értelme.)