A helymeghatározásról a síkban.

(Második közlemény.)

V.

A következőkben a tanult módszereket néhány egyszerűbb feladat megoldására kívánom alkalmazni.

A. 1. *Adva vannak két pont koordinátái:* $a_1, \ a_2, \ a_3, \ ; b_1, \ b_2, \ b_3$; *kerestetik a két ponton keresztül menő egyenes egyenlete.* Az egyenes általános egyenlete mint láttuk, a következő volt:

$$\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2 + \tau_3 x_3 = 0 \tag{1}$$

Ha ezen egyenlet által ábrázolt egyenes keresztül megy az $A(a_1 a_2 a_3)$ és $B(b_1 b_2 b_3)$ pontokon, akkor ezek koordinátái a fenntebbi egyenletbe helyettesítve, azt azonosan egyenlítik a zérussal. Vagyis:

$$\tau_1 a_1 + \tau_2 a_2 + \tau_3 a_3 = 0 \tag{2}$$

$$\tau_1 b_1 + \tau_2 b_2 + \tau_3 b_3 = \tag{3}$$

Ha az (1), (2) és (3)-ból kiküszöböljük a $\tau_1, \ \tau_2, \ \tau_3$ értékét az AB egyenes egyenletét nyerjük; a kiküszöbölés eredménye a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$(a_2 b_3 - b_2 a_3) x_1 + (a_3 b_1 - b_3 a_1) x_2 +$$
$$+ (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_3 = 0$$

2. *Ha két háromszög, ABC és $A'B'C'$, ugyanazon betűvel jelzett szögpontjainak összekötő egyenesei egy pontban S-ben találkoznak, akkor egynevű oldalaik metszéspontjai: $S_1 \equiv (BC, B'C'), \ S_2 \equiv (CA, C'A'), \ S_3 \equiv (AB, A'B')$ egy egyenesben, s-ben metszik egymást.*

Válasszuk az $A'B'C'$ háromszöget koordináta-háromszögül és az S pontot egységpontul. Minthogy az $A'B'C'$ pontok koordinátái rendre:

$$\begin{matrix} a' & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c' \end{matrix}$$

az SA', SB', SC' egyenesek egyenletei a következők lesznek:

$$x_2 - x_3 = 0$$
$$x_2 - x_1 = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0$$

Az $A, \ B, \ C$ pontok koordinátái ekkor:

$$a_1, \ a_2 = a_3$$
$$b_2, \ b_3 = b_1$$
$$c_3, \ c_1 = c_2$$

Az $AB', \ B'C', \ C'A'$ egyenesek egyenletei:

$$x_3 = 0, \ x_1 = 0, \ x_2 = 0$$

és az $AB, \ BC, \ CA$ egyenesekéi:

$$x_1 a_2 (b_3 - b_2) + x_2 b_3 (a_3 - a_1) + x_3 (a_1 b_2 - a_2 b = 0$$
$$x_1 (b_2 c_3 - b_3 c_1) + x_2 c_3 (c_1 - c_3) + x_3 c_1 (b_3 - b_2) = 0$$
$$x_1 a_2 (c_1 - c_3) + x_2 (c_3 a_1 - c_1 a_2) + x_3 c_1 (a_2 - a_1) = 0$$

Az $S_1, \ S_2, \ S_3$ pontok koordinátái tehát:

$$0, -\lambda c_1 (b_3 - b_2), \ \lambda b_3 (c_1 - c_3);$$

$$\mu c_1\ (a_2, -a_1),\ 0,\ \mu a_2(c_1 - c_3);$$

$$-\nu b_3(a_2 - a_1),\ \nu a_2(b - 3 - b_2),\ 0;$$

s a feltétele annak, hogy e három pont egy egyenesben feküdjék a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda c_1(b_3 - b_2) & \lambda b_3(c_1 - c_3) \\ \mu c_1 & (a_2 - a_1) & \mu a_2(c_1 - c_3) \\ -\nu b_3 & (a_2 - a_1) & \nu a_2(b_3 - b_2) \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$\mu\nu\lambda c_1 a_2 b_3(a_2 - a_1)(b_3 - b_2)(c_1 - c_3) -$$

$$-\nu\lambda\mu b_3 c_1 a_2(a_2 - a_1)(b_3 - b_2)(c_1 - c_3) \equiv 0,$$

mely kifejezésről rögtön szembetűnő, hogy azonosan egyenlő a zérussal.

B. $1'$. *Adva vannak két egyenes koordinátái:* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ ;\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3$; *kerestetik a két egyenes metszéspontjának egyenlete.*

A pont általános egyenlete mint láttuk, a következő volt:

$$x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + x_3\tau_3 = 0 \tag{1}$$

Ha az ezen egyenlet által ábrázolt ponton keresztül mennek az $\alpha(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ és $\beta(\beta_1\beta_2\beta_3)$ egyenesek, akkor ezek koordinátái a fenntebbi egyenletbe helyettesítve, azt azonosan egyenlítik a zérussal. Vagyis:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = 0 \tag{2}$$

$$x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0 \tag{3}$$

Ha az (1), (2) és (3)-ból kiküszöböljük a $x_1,\ x_2,\ x_3$ értékeket az $(\alpha\beta)$ pont egyenletét nyerjük; a kiküszöbölés eredménye a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

vagy részletesebben:

$$(\alpha_2\beta_3 - \beta_2\alpha_3)\tau_1 + (\alpha_3\beta_1 - \beta_3\alpha_1)\tau_2 +$$

$$+(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)\tau_3 = 0$$

$2'$. *Ha két háromszög, ABC és $A'B'C'$, ugyanazon betűvel jelzett oldalainak metszéspontjai egy egyenesben s-ben feküsznek, akkor egynevű szögpontjainak összekötő egyenesei: $s_1 \equiv AA'$, $s_2 \equiv BB'$, $s_3 \equiv C, C'$ egy pontban, S-ben találkoznak.*

Válasszuk az $A'B'C'$ háromszöget koordináta-háromszögül és az s egyenest egység-egyenesül. Minthogy az $a'b'c'$ oldalok koordinátái rendre:

$$\begin{matrix} \alpha' & 0 & 0 \\ 0 & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & \gamma' \end{matrix}$$

az $(sa'), (sb'), (sc')$ pontok egyenletei a következők lesznek:

$$\tau_2 - \tau_3 = 0$$

$$\tau_3 - \tau_1 = 0$$

$$\tau_1 - \tau_2 = 0$$

Az $a,\ b,\ c$ egyenesek koordinátái ekkor:

$$\alpha_1,\ \alpha_2 = \alpha_3$$

$$\beta_2,\ \beta_3 = \beta_1$$

$$\gamma_3,\ \gamma_1 = \gamma_2$$

A $C',\ A',\ B'$ pontok egyenletei:

$$\tau_3 = 0,\ \tau_1 = 0,\ \tau_2 = 0$$

és a $C,\ A,\ B$ pontokéi:

$$\tau_1\alpha_2(\beta_3-\beta_2)+\tau_2\beta_3(\beta_2-\beta_1)+\tau_3(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_2)=0$$
$$\tau_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_1)+\tau_2\beta_3(\gamma_1-\gamma_3)+\tau_3\gamma_1(\beta_3-\beta_2)=0$$
$$\tau_1\alpha_2(\gamma_1-\gamma_3)+\tau_2(\gamma_3\alpha_1-\gamma_1\alpha_2)+\tau_3\gamma_1(\alpha_2-\alpha_1)=0$$

Az $s_1,\ s_2,\ s_3$ egyenesek koordinátái tehát:

$$0,-\lambda\gamma(\beta_3-\beta_2),\ \lambda\beta_3(\gamma_1-\gamma_3);$$
$$\mu\gamma_1\ (\alpha_2-\alpha_1),\ 0,\ \mu\alpha_2(\gamma_1-\gamma_3);$$
$$-\nu\beta_3(\alpha_2-\alpha_1),\ \nu\alpha_2(\beta_3-\beta_2),\ 0;$$

s a feltétele annak, hogy e három egyenes egy pontban találkozzék a következő determináns-egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\lambda\gamma(\beta_3-\beta_2) & \lambda\beta_3(\gamma_1-\gamma_3) \\ \mu\gamma_1(\alpha_2-\alpha_1) & 0 & -\mu\alpha_2(\gamma_1-\gamma_3) \\ -\nu\beta_3(\alpha_2-\alpha_1) & \nu\alpha_2(\beta_3-\beta_2) & 0 \end{vmatrix}=0$$

vagy részletesebben:

$$\mu\nu\lambda\gamma_1\beta_3(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_3-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_3)-$$
$$-\nu\lambda\mu\beta_3\gamma_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_3-\beta_2)(\gamma_1-\gamma_3)\equiv 0$$

mely kifejezésről rögtön szembetűnő, hogy azonosan egyenlő a zérussal.

Arany Dániel