I.

Az analytikai geometria alapproblemája egy pont (vagy bármely más *térelem* helyzetét számok segítségével úgy jellemezni, hogy ezen pont minden más ponttól világosan megkülömböztethető legyen. Azaz, ha egy pont helyzete bárminemű feltételek alapján egyértelműen meg van határozva, ezen feltételekből leszármaztatható legyen a számoknak egy bizonyos rendszere, melyben úgy az elemek száma, valamint azok sorrendje ismeretes és megfordítva, ha az elemek száma és sorrendje által meghatározott rendszere a számoknak van adva, ezek egy és csak egy pont helyzetét jellemezzék.

A pont helyzetének ilynemű meghatározását a síkban Descartes azáltal érte el, hogy felvett benne két egymást metsző egyenest $XO'X$ és $Y'OY$-t és egy adott P pont helyzetét akkép jellemezte, hogy megadta a P pontból az $XO'X$ és $Y'OY$ egyenesekkel párhuzamosan húzott egyeneseken $P'P$ és $P''P$ hosszak mérőszámait *(tetszésszerinti mértékegységben),* hol P' és P'' e párhuzamosak és az eredeti egyenes rendszer metszéspontjait jelentették. Viszont két tetszésszerinti x és y szám (a *felírt* sorrendben) a mértékegység megválasztása után meghatározott két hosszúságot, melyek elsejét az $X'OX$ egyenesre, másikát az $Y'OY$ egyenesre az O ponttól számítva felvitte és így két pontot P'' és P'-et nyert, melyekből az $Y'OY$-t és $XO'X$ egyenesekkel párhuzamosat húzva, az x és y számok által jellemzett pontot ezen párhuzamosak metszéspontja gyanánt nyerte.

A következő sorok czélja megismertetni azon általánosabb módszereket, melyek sgítségével egy pont vagy egyenes helyzete a síkban a fennt említett alapprobléma értelmében meghatározható.

II.

A. Képzeljünk a síkban négy pontot $A,\ B,\ C$ és E-t adva, melyek közül bármely három sem esik egy egyenesbe. Jeleljük továbbá az $AE,\ BE$ és CE egyenesek metszéspontjait rendre a $BC,\ CA$ és AB egyenesekkel $E_1,\ E_2$ és E_3-mal. Ekkor a sík bármely ötödik P pontja meghatároz az alább leírandó módszer segítségével 3 számot, melyek a P pont koordinátáinak nevezhetők. A módszer a következő: Jeleljük az $AP,\ BP$ és CP egyenesek metszéspontjait a $BC,\ CA$ és AB egyenesekkel rendre $P_1,\ P_2$ és P_3-mal. Legyen továbbá

$$(BCE_1P_1)=\frac{BE_1}{CE_1}:\frac{BP_1}{CP_1},$$

$$(CAE_3P_2)=\frac{CE_3}{AE_2}:\frac{CP_2}{AP_2},$$

$$(ABE_3P_3)=\frac{AE_3}{BE_3}:\frac{AP_3}{BP_3}.$$

Ha most az E és P pontok távolságait a $BC,\ CA$ és AB egyenesektől rendre $e_1,\ e_2$ és $e_3,\ p_1,\ p_2$ és p_3-mal jeleljük, a fenntebbi szimbólumok a következő értékeket nyerik.

$$(BCE_1P_1)=\frac{e_3}{e_2}:\frac{p_3}{p_2}=\frac{p_2}{c_2}:\frac{p_3}{e_3}=\frac{x_2}{x_3}$$

$$(CAE_2P_2)=\frac{e_1}{e_3}:\frac{p_1}{p_3}=\frac{p_3}{e_2}:\frac{p_1}{e_1}=\frac{x_3}{x_1}$$

$$(ABE_3P_3)=\frac{e_2}{e_1}:\frac{p_2}{p_1}=\frac{p_1}{e_1}:\frac{p_2}{e_2}=\frac{x_1}{x_2}$$

Az így nyert $x_1,\ x_2$ és x_3 értékeket a P *pont* koordinátáinak nevezzük.

Az (1) alatti reláczió helyességét a következőképpen igazoljuk:

$$\frac{BE_1}{CE_1}=\frac{BE_1}{CE_1}:\frac{AE_1}{AE_1}$$

A sinus-tétel értelmében azonban:

$$BE_1:AE_1=\sin BAE_1:\sin B$$

$$CE_1:AE_1=\sin CAE_1:\sin C$$

tehát

$$\frac{BE_1}{CE_1}=\frac{\sin BAE_1}{\sin B}:\frac{\sin CAE_1}{\sin C}=$$

$$=\frac{\sin BAE_1}{\sin CAE_1}:\frac{\sin B}{\sin C}=$$

vagy a

$$CA:AB=\sin B:\sin C=b:c$$

$$\frac{\sin BAE_1}{\sin CAE_1}=\frac{\sin BAE}{\sin CAE}=\frac{e_3}{e_2}$$

egyenletek folytán

$$\frac{BE_1}{CE_1} = \frac{e_3}{e_2} : \frac{b}{c}$$

Hasonlóképpen kimutatható, hogy

$$\frac{BP_1}{CP_1} = \frac{p_3}{p_2} : \frac{a}{b}$$

miből végre

$$(BCE_1P_1) = \frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2}{e_2} : \frac{p_3}{e_3} = \frac{x_2}{x_3}$$

Q. e. d.

B. Képzeljünk továbbá a síkban négy egyenest $a,\ b,\ c$ és e-t adva, melyek közül bármely három sem metszi egymást egy pontban. Jeleljük továbbá az e egyenes metszéspontjai az $a,\ b$ és c egyenesekkel rendre $\mathfrak{E}_1,\ \mathfrak{E}_2$, és $\mathfrak{E}_3$-mal. Ekkor a sík bármely ötödik p egyenese meghatároz az alább leírandó módszer segélyével 3 számot, melyek *per analogiam* az *egyenes* koordinátáinak nevezhetők. A módszer a következő:

Jeleljük a p és az $a,\ b$ és c egyenesek metszéspontjait rendre $\mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_2$, és $\mathfrak{P}_3$-mal. Legyen továbbá a b és c egyenesek metszéspontja A, a c és a egyeneseké B és végre az a és b egyeneseké C. Ekkor mint előbb

$$(BC\mathfrak{E}_1\mathfrak{P}_1) = \frac{B\mathfrak{E}_1}{C\mathfrak{E}_1} : \frac{B\mathfrak{P}_1}{C\mathfrak{P}_1},$$

$$(CA\mathfrak{E}_2\mathfrak{P}_2) = \frac{C\mathfrak{E}_2}{A\mathfrak{E}_2} : \frac{C\mathfrak{P}_2}{A\mathfrak{E}_2},$$

$$(AB\mathfrak{E}_3\mathfrak{P}_3) = \frac{A\mathfrak{E}_3}{B\mathfrak{E}_3} : \frac{A\mathfrak{P}_3}{B\mathfrak{P}_3}.$$

Ha most az $A,\ B$ és C pontok távolságait az e és p egyenesektől rendre $\mathfrak{e}_1,\ \mathfrak{e}_2$ és $\mathfrak{e}_3,\ \mathfrak{p}_1,\ \mathfrak{p}_2$ és $\mathfrak{p}_3$-mal jeleljük, a fenntebbi szimpolumok a következő értékeket nyerik.

(I) $$(BC\mathfrak{E}_1\mathfrak{P}_1) = \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{e}_3} : \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{p}_3} = \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{e}_3} : \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{p}_2} = \frac{\tau_3}{\tau_2}$$

(II) $$(CA\mathfrak{E}_2\mathfrak{P}_2) = \frac{\mathfrak{e}_3}{\mathfrak{e}_1} : \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{p}_1} = \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{e}_1} : \frac{\mathfrak{p}_3}{\mathfrak{e}_3} = \frac{\tau_1}{\tau_3}$$

(III) $$(AB\mathfrak{E}_3\mathfrak{P}_3) = \frac{\mathfrak{e}_1}{\mathfrak{e}_2} : \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{p}_2} = \frac{\mathfrak{p}_2}{\mathfrak{e}_2} : \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{e}_1} = \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

Az így nyert $\tau_1,\ \tau_2$ és τ_3 értékeket a p *egyenes* koordinátáinak nevezzük

Az (1) alatti reláczió helyessége hasonló háromszögek oldalainak arányossága alapján közvetlenül belátható.

III.

Vizsgáljuk már most néhány különleges helyzetű pontnak, illetőleg egyenesnek a koordinátáit.

A. Ha a P pont az E ponttal egybeesik, akkor $p_1 = e_1,\ p_2 = e_2,\ p_3 = e_3$ s így $x_1 = x_2, = x_3 = 1$ a miért is az E pontot *egységpontnak* fogjuk hívni.

Ha a P pont a *koordinátaháromszög* egy oldalára esik, pl. $BC = a$-ra, akkor $p_1 = 0$, s így $x_1 = \frac{p_1}{e_1} = 0$, míg $x_2 = \frac{p_2}{e_2},\ x_3 = \frac{p_3}{e_3}$ meghatározott értékek; ha a P pont a koordinátaháromszög egy csúcspontjába, pl. A-ba esik, akkor $p_2 = 0$, míg $p_1 = h_1$,a háromszög egyik magasságvonalával egyenlő. Ez esetben $x_2 = x_3 = 0,\ x_1 = \frac{p_1}{e_1}$ meghatározott érték.

Minthogy az 1), 2) és 3) alatti egyenletek szorzatából következik, hogy

$$(BCE_1P_1) = CAE_2P_2)(ABE_3P_3) = 1$$

látjuk, ha egységpontul a háromszög *súlypontját* G-t választjuk, mely esetben

$$\frac{BE_1}{CE_1} = \frac{CE_2}{AE_2} = \frac{AE_3}{BE_3} = -1$$

hogy

$$\frac{BP_1}{CP_1} \times \frac{CP_2}{AP_2} \times \frac{AP_3}{BP_3} = -1,$$

az ismeretes *Ceva-feltétel.*

B. Ha a p egyenes az e egyenessel egybeesik, akkor $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{p}_3 = \mathfrak{e}_3$ s így $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$, a miért is az e egyenest *egység-egyenesnek* fogjuk híni.

Ha a p egyenes a koordinátaháromszög egy csúcspontján megy keresztül, pl. A-n, akkor $\tau_1 = \frac{\mathfrak{p}_1}{\mathfrak{e}_1} = 0$, míg τ_2 és τ_3 meghatározott értékek; ha a p egyenes a koordináta háromszög egy oldalával pl. a-val egybeesik, akkor $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3 = 0$, míg $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{h}_1$. Ez esetben $\tau_2 = \tau_3 = 0$, míg $\tau_1 = \frac{\mathfrak{h}_1}{\mathfrak{e}_1}$ meghatározott érték.

Minthogy az I), II) és III) alatti egyenletek szorzatából következik, hogy

$$(BC\mathfrak{E}_1\mathfrak{P}_1)(CA\mathfrak{E}_2\mathfrak{P}_2)(AB\mathfrak{E}_3\mathfrak{P}_3) = 1$$

látjuk, ha egység-egyenesül azon egyenest választjuk, mely a koordinátaháromszögek oldalait végtelen távolságban metszi, vagy röviden a sík *végtelenben lévő* egyenesét, mely esetben

$$\frac{B\mathfrak{E}_1}{C\mathfrak{E}_1} = \frac{C\mathfrak{E}_2}{A\mathfrak{E}_2} = \frac{A\mathfrak{E}_3}{B\mathfrak{E}_3} = 1$$

hogy

$$\frac{B\mathfrak{P}_1}{C\mathfrak{P}_1} \times \frac{C\mathfrak{P}_2}{A\mathfrak{P}_2} \times \frac{A\mathfrak{P}_3}{B\mathfrak{P}_3} = 1,$$

az ismeretes *Menelaus-féle* tétel.

IV.

Tegyük fel már most, hogy az egység pont és az egység-egyenes úgy van választva, hogy

(4) $$\frac{BE_1}{CE_1} = -\frac{B\mathfrak{E}_1}{C\mathfrak{E}_1}, \quad \frac{CE_2}{AE_2} = -\frac{C\mathfrak{E}_2}{A\mathfrak{E}_2}, \quad \frac{AC_3}{BE_3} = -\frac{A\mathfrak{E}_3}{B\mathfrak{E}_3}.$$

Vizsgáljuk meg annak feltételét, hogy a P pont a p egyenesen fekszik, vagy megfordítva a p egyenes a P ponton megy keresztül.

Az I), II) és III) alatti egyenletek a (4) alattiak tekintetbe vételével a következő alakot nyerik

$$(BCE_1\mathfrak{P}_1) = -\frac{\tau_3}{\tau_2}$$

$$(CAE_2\mathfrak{P}_2) = -\frac{\tau_1}{\tau_3}$$

$$(ABE_3\mathfrak{P}_3) = -\frac{\tau_2}{\tau_1}$$

Ha ezekkel összekapcsoljuk az (1), (2), és (3) alatti egyenleteket azáltal, hogy azokat előbbiekkel rendre elosztjuk, kapjuk a következőket:

$$-\frac{x_2\tau_2}{x_3\tau_3} = BCE_1P_1) : (BCE_1\mathfrak{P}_1) = \frac{BE_1}{CE_1} : \frac{BP_1}{CP_1} : \frac{BE_1}{CE_1} : \frac{B\mathfrak{P}_1}{C\mathfrak{P}_1} =$$

$$= \frac{B\mathfrak{P}_1}{C\mathfrak{P}_1} : \frac{BP_1}{CP_1} = (BCP_1\mathfrak{P}_1)$$

$$-\frac{x_3\tau_3}{x_1\tau_1} = (CA\mathfrak{P}_2P_2), \; -\frac{x_1\tau_1}{x_2\tau_2} = (AB\mathfrak{P}_3P_3)$$

Ezekből a következő párokat képezzük:

(5) $$-\frac{x_2\tau_2}{x_3\tau_3} - \frac{x_1\tau_1}{x_3\tau_3} = (BCE\mathfrak{P}_1P_1) + (CAP_2\mathfrak{P}_2) stb.$$

Projiciáljuk a $(CAP_2\mathfrak{P}_2)$-t a P pontból a BC-re, kapjuk a következő eyenlőséget:

$$(CAP_2\mathfrak{P}_2) = (CP_1B\mathfrak{P}_1) = (B\mathfrak{P}_1CP_1)$$

mi által az 5) alatti összeg a következő alakot nyeri:

$$(BC\mathfrak{P}_1P_1) + (BC\mathfrak{P}_1CP_1)$$

Ha most e pontsorokat egy tetszőleges $\mathfrak{X}$ pontból egy a $\mathfrak{X}P_1$-gyel párhuzamos egyenesre projiciáljuk, úgy tehát, hogy a P_1 projekciója végtelen lesz, az összeg a következő alakot veszi fel:

$$(B'C'\mathfrak{P}'_1\infty) = (B'\mathfrak{P}'_1C'\infty) = \frac{B'\mathfrak{P}'_1}{C'\mathfrak{P}'_1} + \frac{B'C'}{\mathfrak{P}'_1C'} = \frac{C'\mathfrak{P}'_1}{C'\mathfrak{P}'_1} = 1$$

vagyis

$$-\frac{x_2\tau_2}{x_3\tau_3} - \frac{x_1\tau_1}{x_3\tau_3} = 1;$$

azaz végre az

$$x_1\tau_1 + x_2\tau_2 + x_3\tau_3 = 0$$

egyenletet a kívánt feltétel gyanánt nyerjük.

Arany Dániel

(f o l y t a t j u k).