Cardan formulájának Cayley által módosított alakja.

(A "Nouvelles Annales" 1895. augusztus havi számából)

Tudjuk, hogy az

$$y^3 + 3py + 2q = 0 \tag{1}$$

harmadfokú egyenletnek megoldását a Cardan formulája a következő alakban szolgáltatja

$$y = u + v \tag{2}$$

hol

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}}, \qquad v = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} \tag{3}$$

Tudjuk továbbá, hogy minden köbgyöknek 3 értéke van, melyek egymásból az 1, e, e^2-tel való szorzás által nyerhetők, hol e a következő másodfokú egyenletből számítható ki:

$$e^2 + e + 1 = 0 \tag{4}$$

Ennélfogva az y-nak, ha u és v-nek értékeit a (3)-ból vesszük, 9 külömböző értéke van. Ezen kilencz érték közül azonban csak azok gyökei az (1)-nek, melyekben az u és v az

$$uv = -p \tag{5}$$

egyenletet kielégítik.

Cardan formulája tehát annyiban hézagos, a mennyiben egymagában, -discussió nélkül- nem elegendő a gyökök meghatározására.

A hírneves angol mathematikus, *Cayley*, következőképpen segített e hiányon.

Két új értéket ξ-t és η-t a következőképpen értelmezett:

$$u = \xi^2\eta, \qquad v = \xi\eta^2 \tag{6}$$

Szorozzuk e két értéket egymással, az (5)-nek tekintetbe vételével, lesz ekkor:

$$\xi\eta = \sqrt[3]{-p} \tag{7}$$

Helyettesítsük ezen értéket (6)-ba, és írjuk u és v helyébe a (3)-ból vett értékeiket. Ekkor a kvöetkező értékeket nyerjük:

$$\xi = \sqrt[3]{\frac{q}{p} + \sqrt{\frac{q^2}{p^2} + p}}$$

(8)

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{q}{p} - \sqrt{\frac{q^2}{p^2} + p}}$$

Ha most az y-t az

$$y = \xi\eta = (\xi + \eta)$$

alakban írjuk, oly kifejezést nyerünk, melyben ha ξ-t ξ, $e\xi$, $e^2\xi$ és η-t η, $e\eta$, $e^2\eta$ által helyettesítjük többé nem kilencz külömböző értéket kapunk, hanem csak a következő hármat:

$$\xi^2\eta + \xi\eta^2,$$

$$e\xi^2\eta + e^2\xi\eta^2,$$

$$e^2\xi^2\eta + e\xi\eta^2,$$

melyek az (1) alatti egyenlet gyökei.

(Weber H. M. göttingeni tanártól).