Gyakran előforduló eset a számításoknál, hogy bennük bizonyos számokat másokkal helyettesítünk, melyek tőlük többé-kevésbé külömböznek. Azon számokat, melyekkel működnünk kellene *pontos számoknak,* azokat, melyekkel helyettesítjük őket, *közelítő számoknak* nevezzük.

Valamely közelítő szám *absolut hibája* alatt a pontos szám és a közelítő szám külömbségének absolut, azaz az előjeltől független értékét értjük.

A *viszonylagos* (relatív) *hibája* valamely közelítő számnak az absolut hiba- és a pontos számnak pontos hányadosa.

Ha A-val jelöljük a pontos számot, e-vel az absolut hibát és e'-tel a relatív hibát, akkor az értelmezés következtében

$$e' = \frac{e}{A}.$$

A következőkben megtartjuk e jelzéseket; azonkívül a közelítő számot a-val fogjuk jelölni; végre csak a tizes számrendszerben kifejezett számokat veszünk tekintetbe.

1. Tantétel. -*Ha valamely közelítő szám absolut hibája kisebb az n-edik számjegye rendjének egy egységénél, e szám relatív hibája kisebb mint* $\frac{1}{10^{n-1}}$.

Tegyük fel, hogy a szám n-edik számjegye, a szám p-edik tizedese. Ekkor feltevés szerint az absolut hiba

$$e < \frac{1}{10^p},$$

miből

$$e' < \frac{1}{A \times 10^p}.$$

Tegyük fel, hogy a szám egész-számú része zérustól külömböző, mely esetben $n - p$ számjegyet tartalmaz és

$$A > 10^{n-p-1}.$$

A két utolsó egyenlőtlenségből következik, hogy:

$$e' < \frac{1}{10^{n-p-1} \times 10^p}.$$

vagy

$$e' < \frac{1}{10^{n-1}}.$$

2. Tantétel. -*Ha valamely közelítő szám relatív hibája kisebb mint* $\frac{1}{10^n}$, *e szám absolut hibája kisebb az n-edik számjegye rendjének egy egységénél.*

Feltevés szerint $e' < \frac{1}{10^n}$ vagyis $\frac{c}{A} < \frac{1}{10^n}$. Ebből következik, hogy $e < \frac{A}{10^n}$. Tegyük fel ismét, hogy a szám n-edik számjegye, a szám p-edik tizedese és hogy a szám egész számú része zérustól külömböző. Az egész-számú rész számjegyeinek száma ekkor $n - p$ és írhatjuk, hogy $A < 10^{n-p}$; miből következik, hogy $e < \frac{10^{n-p}}{10^n}$ vagy $e < \frac{1}{10^p}$.

3. Tantétel. -- *Két alsó közelítő (a pontos számnál kisebb) szám szorzatának relatív hibája kisebb a tényezők relatív hibái összegénél.*

Legyenek A és B a pontos számok, a és b a közelítő számok, e és e_1 az absolut hibák és e' és e'_1 a relatív hibák. Legyen továbbá E a szorzat absolut hibája és E' relatív hibája. Ekkor

$$A = a + e, \qquad B = b + e';$$

miből

$$AB = ab + be + ae_1 + ee_1;$$

s így tehát

$$E = be + e_1(a + e) = be + Ae_1.$$

Továbbá

$$E < Be + Ae_1 \qquad \text{és} \qquad E' < \frac{Be + Ae_1}{AB},$$

vagyis

$$E' < \frac{e}{A} + \frac{e_1}{B},$$

vagy végre

$$E' < e' + e'_1.$$

4. Tantétel. -*Két közelítő szám pontos hányadosának relatív hibája kisebb e számok relatív hibáinak összegénél, ha a számláló alsó közelítő és a nevező felső közelítő szám.*

Megtartva az előbbi tantétel jelzéseit, a következőket nyerjük:

$$a = A - e, \qquad b = B + e_1, \qquad \frac{a}{b} = \frac{A-e}{B+e_1}, \qquad E = \frac{A}{B} - \frac{A-e}{B+e_1}$$

$$E = \frac{Be + Ae_1}{B(B+e_1)}, \qquad E < \frac{Be + Ae_1}{B^2};$$

miből

$$E' < \frac{Be + Ae_1}{B^2} \times \frac{B}{A} = \frac{e}{A} + \frac{e_1}{B},$$

vagy végre

$$E' < e' + e_1'.$$

5. Tantétel. -*Valamely felső közelítő szám négyzetgyökének relatív hibája kisebb e szám relatív hibájának felénél.*

$$a = A + e, \qquad E = \sqrt{a} - \sqrt{A} = \sqrt{A+e} - \sqrt{A} = \frac{e}{\sqrt{A+e} + \sqrt{A}}.$$

miből

$$E < \frac{e}{2\sqrt{A}}, \qquad E' < \frac{e}{2\sqrt{A} \times \sqrt{A}} = \frac{e}{2A},$$

s így végre

$$E' < \frac{e'}{2}.$$

Feladat. - Számíttassék ki $\pi\sqrt{2}$ 2 tizedesnyi pntossággal.

Minthogy $\pi < 4$ és $\sqrt{2} < 2$, a keresett szorzat kisebb mint 8. E számnak egész számú része 1 számjegyből áll. Ennélfogva, minthogy 2 tizedesnyi pontosságot akarunk, kell, hogy az absolut hiba kisebb legyen a harmadik számjegy rendjének egy egységénél.

Vegyük minden szorzóban a $3+2$ azaz 5 első számjegyet. Ekkor a $6,1415$ és $1,4141$ számokat nyerjük, mely számoknak relatív hibái az *1. Tantétel* értelmében kisebbek az $0,0001$-nél. Képezzük e két szám szorzatát, mi $4,44239515$-öt ad. A *3. Tantétel* értelmében e szorzat relatív hibája kisebb mint $0,0002$ vagy mint $0,001$, tehát a *2. Tantétel* értelmében absolut hibája kisebb a 3-ik számjegye rendjének egy egységénél. A keresett szám, $4,44$, alsó közelítő szám.

Arany Dániel.