A Ceva-féle tétel és alkalmazása.

A síkháromszögeknél előforduló tételek, melyek a középvonalak, szögfelezők és magasságok egy-egy pontban találkozására vonatkoznak, vagy meglehetősen nehézkes módon, vagy éppen nincsenek bizonyítva tankönyveinkben, melyek az e tekintetben felette fontos Ceva-féle tételt sem közlik; pedig mint a párhuzamos átszelőkről tanultak egyik alkalmazását és a Menelaus-féle tétel társát, minden nehézség nélkül fölvehetnék részben, mint az említettem tételek egyszerű bizonyításának eszközét, részben mint adott három elemhez a negyedik harmonikus szerkesztésének igazolási módját.

A tétel így szól: Ha a háromszög csúcsain át oly egyeneseket húzunk, melyek a sík egy pontján mennek át: a szemben fekvő oldalakon, illetőleg megnyújtásaikon származó metszéspontok úgy osztják ez oldalokat, hogy a szeletekből képezett arányok szorzata a negatív egység, azaz, ha A, B, C a háromszög csúcsai és A_1, B_1, C_1 a mondott módon keletkezett metszéspontok:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\frac{B_1C}{B_1A}\frac{C_1A}{C_1B}=-1$$

hol az egyes arányok jele elemeik egyenlő, vagy ellenkező iránya szerint veendő positív, vagy negatív értelemben.

A tétel bizonyítása így is eszközölhető:

Legyen P az AA_1 BB_1 CC_1 sugarak metszéspontja.

Az APB, BPC, CPA háromszögek ketten-ketten közös BP, CP, AP alapon állván, területeik úgy aránylanak, mint magasságaik, ez utóbbiak pedig a származott hasonló háromszögek folytán mint a közös alap megnyújtása által AC, AB, BC oldalakon keletkezett szeletek, azaz:

$$APB:BPC=B_1A:CB_1$$

$$BPC:CPA=C_1B:C_1A$$

$$CPA:APB=A_1C:A_1B$$

mely aránylatok megfelelő tagjainak szorzása által:

$$1:1=A_1C\cdot C_1B\cdot B_1A\ :\ A_1B\cdot C_1A\cdot CB_1$$

honnan:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}.=-1,$$

mert az arányok mindannyia negatív, ha P a háromszög belsejében fekszik, vagy egy közülük negatív, ha P a háromszögön kívül van.

A tétel megfordítható, mint minden általános állító tétel. A megfordítás így fogalmazható: ha a háromszög három oldalán úgy választjuk az $A_1\,B_1\,C_1$ pontokat, hogy a szeletekből képezett arányok szorzata a negatív egység: az AA_1, BB_1, CC_1 sugarak egy ponton mennek át.

Alkalmazás.

1. A középvonalak egy pontban, a súlypontban találkoznak, mert az esetben $A_1B=-A_1C$, $B_1C=-B_1A$, $C_1A=-C_1B$

és így:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=(-1)^3=-1$$

2. A háromszög belső szögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak, mert ez esetben:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=-\frac{c}{b},\quad \frac{B_1C}{B_1A}=-\frac{a}{c},\quad \frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{b}{a}$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=\frac{abc}{abc}=-1$$

2a. A háromszög egyik szögét és a másik kettő mellékszögeit felező egyenesek egy pontban találkoznak, mert pl. az A, $(\pi-B)$, $(\pi-C)$ szögeket vévén:

$$\frac{A_1B}{A_1C}=-\frac{c}{b},\quad \frac{B_1C}{B_1A}=\frac{a}{c},\quad \frac{C_1A}{C_1B}=\frac{b}{a}$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{abc}{abc}=-1.$$

Az m_a, m_b, m_c magasságok egy pontban találkoznak, mert a keletkezett hasonló háromszögekből: (Egyszerűség kedvéért geometriai függvényeket használva)

$$\frac{A_1B}{A_1C}=-\frac{c\ \cos B}{b\ \cos C}\qquad \frac{B_1C}{B_1A}=-\frac{a\ \cos C}{c\ \cos A}\qquad \frac{C_1A}{C_1B}=-\frac{b\ \cos A}{a\ \cos B}$$

és így

$$\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B} = \frac{abc\ \cos A\ \cos B\ \cos C}{abc\ \cos A\ \cos B\ \cos C} = -1$$

Hasonló módon alkalmazhatni egyes esetekben a Menelaus-féle tételt három pontnak egy egyenesben fekvése kritériumául.

Maksay Zsigmond.