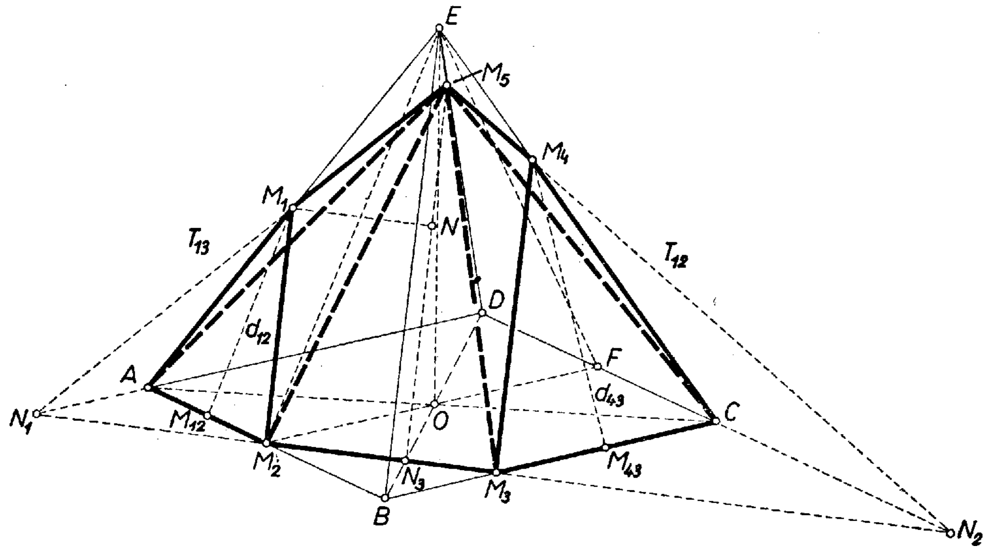
I. megoldás: Jelöljük az $M_2M_3CDAM_1M_5M_4 = T_1$ rész-test térfogatát V_1-gyel, az $M_2BM_3M_4M_5M_1E = T_2$ rész-test térfogatát V_2-vel. Elég pl. V_1-et önállóan kiszámítani, mert V_1 és V_2 összege egyenlő az eredeti $ABCDE = G$ gúla $V = a^3/3$ térfogatával, ahol a az alapél és a magasság közös hosszát jelöli.



1. ábra

Az ajánlott $M_5AM_2M_3CD = T_{11}$ gúla része T_1-nek, úgy áll elő, hogy T_1-et egyrészt a C, M_3, M_5, másrészt az A, M_2, M_5 csúcsokon átmenő síkkal metsszük. A lemetszett $CM_3M_5M_4 = T_{12}$ és $AM_2M_5M_1 = T_{13}$ részek háromoldalú gúlák. Eszerint V_1-et T_{11}, T_{12} és T_{13}-nak V_{11}, V_{12}, V_{13} térfogatából összeadással kaphatjuk.

T_{11} alapja az $ABCD$ négyzetből a BM_3M_2 derékszögű háromszög lemetszésével áll elő, amelyben $BM_2 = a/2$, $BM_3 = a/3$, így az alap területe $a^2 - a^2/12 = 11a^2/12$. T_{11} magassága az idézett eredmény szerint nyilvánvalóan $4a/5$, ennélfogva $V_{11} = 44a^3/180 = 11a^3/45$.

V_{13} kiszámításához vegyük T_{13} alapjának az AM_2M_1 háromszöget, ekkor a testmagasság M_5-nek az AM_2M_1-et tartalmazó ABE laptól való d_{52} távolsága. Az AM_2M_1 lap területének számításához alapnak AM_2-t véve a magasság M_1-nek AM_2-től való $M_1M_{12} = d_{12}$ távolsága. Így a feltevésre tekintettel

(1) $$V_{13} = \frac{1}{2}AM_2 \cdot d_{12} \cdot \frac{1}{3}d_{52} = \frac{AM_2}{6} \cdot d_{12}d_{52} = \frac{a}{12} \cdot d_{12} \cdot d_{52}.$$

Az idézett eredmények szerint d_{12} egyenlő az ABE háromszög EM_2 magasságának felével. E magasság hossza nyilván $a\sqrt{5}/2$, tehát $d_{12} = a\sqrt{5}/4$. – Másrészt d_{52} annak a távolságnak 5-ödrésze, amennyire D (vagy a DC él bármely pontja) van az ABE laptól. Könnyen számíthatjuk ezt mint a CD él F felezőpontjának EM_2-től való távolságát, mert ez az EM_2F háromszög F-ből húzott magassága. E háromszög t területének kétféle kifejezéséből – az alap középpontját O-va1 jelölve –

$$5d_{52} = 2t/EM_2 = M_2F \cdot EO/EM_2 = a^2/(a\sqrt{5}/2) = 2a/\sqrt{5},$$

ennélfogva $d_{52} = 2a/5\sqrt{5}$, és végül

$$V_{13} = \frac{a}{12} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{2a}{5\sqrt{5}} = \frac{a^3}{120}.$$

Hasonlóan

(2) $$V_{12} = CM_3 \cdot d_{43} \cdot d_{53}/6 = d_{43} \cdot d_{53} \cdot a/9,$$

ahol $d_{43} = M_4M_{43}$ az M_4 távolsága CM_3-tól, és d_{53} az M_5 távolsága a CM_3M_4, azaz CBE laptól. Itt nyilván $d_{43} = 2EM_2/3 = a\sqrt{5}/3$, és $d_{53} = d_{52}$, tehát

$$V_{12} = \frac{a\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{2a}{5\sqrt{5}} \cdot \frac{a}{9} = \frac{2a^3}{135}.$$

Mindezek alapján

$$V_1 = V_{11} + V_{12} + V_{13} = a^3\left(\frac{11}{45} + \frac{2}{135} + \frac{1}{120}\right) = \frac{289a^3}{1080},$$

ebből pedig az előrebocsátottak szerint

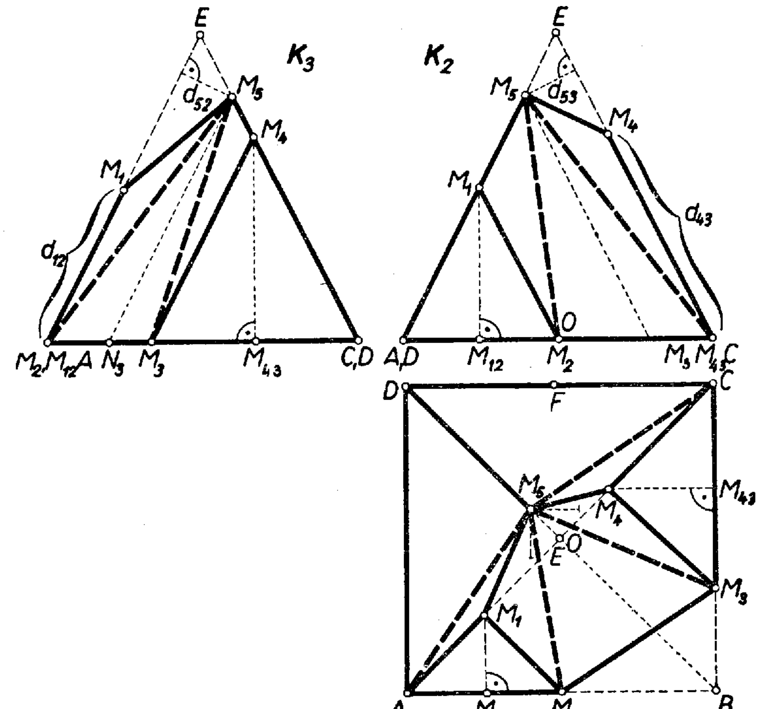
$$V_2 = V - V_1 = \frac{a^3}{3} - \frac{289a^3}{1080} = \frac{71a^3}{1080}.$$

(Mint látjuk, V_2 valamivel kisebb $V_1/4$-nél.)

Marton Katalin (Budapest, Fazekas M. gyak. g. IV. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az (1) és (2) céljára elég a $d_{12}\cdot d_{52}$, ill. $d_{43}\cdot d_{53}$ szorzat értékét a-val kifejeznünk. Az utóbbi szorzat megállapítható G és T_1-nek egy a CB élre merőleges K_2 síkon adódó vetületéből. E vetületben d_{43} és d_{53} valódi nagyságukban látszanak, mert mindkét szakasz merőleges CB-re és így párhuzamos K_2-vel. Másrészt egyik oldalát és hozzátartozó magasságát adják az M_{43}, M_4, M_5 csúcsok vetületei által alkotott háromszögnek, így szorzatuk e háromszög 2-szeres területét adja. Ez a terület úgy is kiszámítható, hogy összehasonlítjuk annak a háromszögnek a területével, amelyet a G test A, C, E csúcsainak ugyancsak K_2-re való vetületei határoznak meg. E háromszög területe, AC vetületét véve alapnak, $a^2/2$, mert alapja és magassága a. Ha pedig CE vetületét vesszük alapnak, ennek d_{43} vetülete a 966. feladat idézett eredményei szerint 2/3 része, az A vetületéből húzott magasságnak pedig az M_5 vetületéből húzott d_{53} magasság 1/5 része. Eszerint a vetületbeli $M_{43}M_4M_5$ háromszög területe $a^2/15$, a vizsgált szorzat $2a^2/15$, végül ismét

$$V_{12}=(a/9)\cdot(2a^2/15)=2a^3/135.$$



2. ábra

Hasonlóan G és T_1-nek egy az AC élre merőleges K_3 síkon előálló vetületéből az idézett eredmények alapján (lásd a 2. ábrát)

$$d_{12}\cdot d_{52}=2\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{a^2}{10},\quad \text{és így}\quad V_{13}=\frac{a^3}{120}.$$

2. Ajánljuk olvasóinknak, hogy térbeli feladatok megoldásában próbálják meg segítségül venni az ábrázoló geometria rajzoló módszereivel előállított vetületeket. A fentihez hasonló meggondolásokban, a képeknek az eredeti jelentéstől kissé eltávolodó értelmezésében azonban fokozott óvatosságot tanúsítsunk! Ilyet látunk a következő megjegyzésben is.

3. Egyrészt a DN_3 szakaszon, másrészt rendre az M_1, M_5, M_4 ponton át fektetett síkokkal T_1-et négy részre vágva is kiszámíthatjuk V_1-et. Az egymás utáni részek: az N_3DAM_2 alapú, M_1 csúcsú, négyoldalú gúla, a közös N_3DM_5 alapú és M_1, ill. M_4 csúcsú háromoldalú gúlák és az N_3DCM_3 alapú M_4 csúcsú gúla.

Az első és a negyedik gúla alapterülete az 1015. feladat segédtételének felhasználásával $9a^2/20$, ill. $7a^2/15$, a megfelelő magasságok $a/2$, ill. $2a/3$, így a térfogatok a $3a^3/40$, ill. $14a^3/135$. A 2-ik és 3-ik gúla térfogatának összege egyszerre számítható: a mondott közös alap területe 16/25 része a DBE háromszög $a^2/\sqrt{2}$ területének: $8a^2\sqrt{2}/25$, a két magasság összege pedig egyenlő az M_1M_4 szakasznak a K_1 alapsíkon levő vetületével $5a\sqrt{2}/12$-vel. Tehát az együttes térfogat $4a^3/45$. E három térfogat összege a fenti V_1.

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)

II. megoldás: Részekre bontás nélkül, kiegészítéssel számíthatjuk V_1-et, ha T_1-hez hozzávesszük az AM_2N_1 alapú, M_1 csúcsú és a CM_3N_2 alapú, M_4 csúcsú háromoldalú gúlát. Így a DN_1N_2 alapú, M_5 csúcsú háromoldalú gúlához jutunk és

$$V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{4a}{3}\cdot 2a\frac{4a}{5}-\frac{a}{3}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}-\frac{2a}{3}\cdot a\frac{2a}{3}\right)=\frac{289a^3}{1080}.$$

Dömötör Gyula (Szeged, Radnóti M. g. III. o. t.)

III. megoldás: Számítsuk ki önállóan V_2-t abból, hogy T_2-t az M_2M_3E síkkal metszve két olyan gúlát kapunk, melyek közös csúcsa E, alapjuk pedig M_2M_3B és $M_1M_2M_3M_4M_5$. Ezek területe $a^2/12$, ill. az 1015. feladat megoldása szerint $41a^2\sqrt{77}/720$. Az első gúla magassága a, így térfogata $a^3/36$. A második gúla magassága E-nek, vagy ami ugyanaz, a BE élnek a metsző S-től való távolsága. Ennek meghatározására messük T_2-t a BE-re merőleges síkkal. A síkmetszet oldalai egyenlők az M_2M_1 és BE, a BE és M_3M_4, ill. az M_2M_1 és M_3M_4 párhuzamosok távolságával. Az első nyilván fele, a második pedig harmada az ABE háromszögben a BE alaphoz tartozó $a\sqrt{30}/6$ magasságnak, vagyis $a\sqrt{30}/12$, ill. $a\sqrt{30}/18$; a harmadik pedig az 1015. feladat megoldása szerint $h_1+h_2=5h_1/3=a\sqrt{462}/36$. Ezekből e metszet területe (a Heron-képlet beszorzással adódó alakjából) $a^2\sqrt{6}/36$, és a harmadik oldalhoz tartozó magassága, a keresett távolság $2a/\sqrt{77}$. Most már az $EM_1M_2M_3M_4M_5$ gúla térfogata $41a^3/1080$ és a két gúla térfogatának összege $V_2=71a^3/1080$.

Frint Gábor (Mosonmagyaróvár, Kossuth L. g. III. o. t.)

Megjegyzés. T_2-t az N_3BEM_5 síkkal kettévágva két ferdén lemetszett háromoldalú hasábot kapunk. Könnyű belátni, hogy ilyen hasáb térfogatát az oldalélekre merőleges keresztmetszetnek az oldalélek számtani közepével való szorzata adja (pl. a legrövidebb oldalél egyik végpontján át a másik véglappal párhuzamos metszéssel a test egy hasábra és egy trapéz alakú gúlára bontható; másképpen pedig egy trapéz és egy háromszög alapú gúlára). Az $M_2BN_3M_5M_1E$ hasáb keresztmetszetének területe a $h_1:h_2=3/2$ arány alapján $3/5$ része a fenti megoldásban nyert $a^2\sqrt{6}/36$ keresztmetszetnek, a $BM_3N_3M_5EM_4$ hasábé pedig $2/5$ része ugyanennek. Így – c-vel a $BE=a\sqrt{6}/2$ oldalélt jelölve

$$V_2=\frac{3}{5}\cdot\frac{a^2\sqrt{6}}{36}\cdot\frac{1}{3}\left(c+\frac{4c}{5}+\frac{2c}{2}\right)+\frac{2}{5}\cdot\frac{a^2\sqrt{6}}{36}\frac{1}{3}\left(c+\frac{4c}{5}+\frac{2c}{3}\right)=$$
$$=\frac{23a^2c\sqrt{6}}{1800}+\frac{37a^2c\sqrt{6}}{4050}=\frac{71a^2c\sqrt{6}}{3240}=\frac{71a^3}{1080}.$$

Bollobás Béla (Budapest, Apáczai Csere J. gyak. g. III. o. t.)