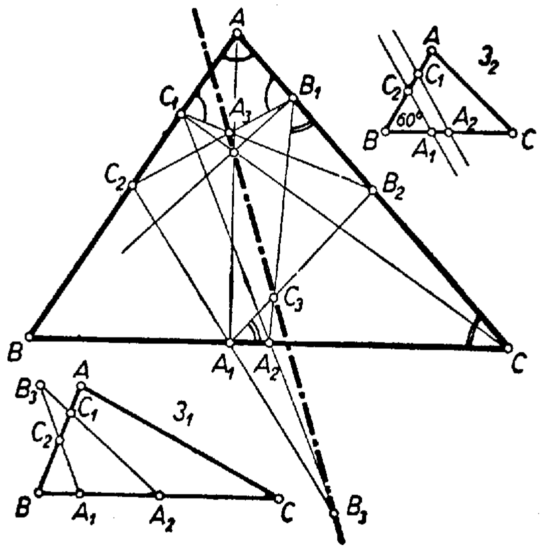
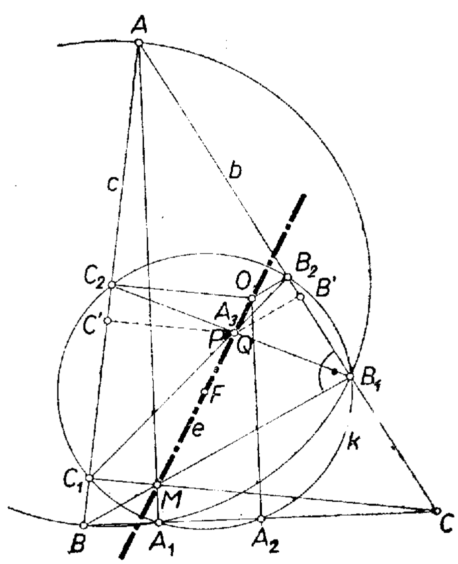
I. megoldás: Kimutatjuk, hogy ha A_3 létezik, akkor rajta van a háromszög M magasságpontját és a köré írt kör O középpontját összekötő e egyenesen (e csak szabályos ABC háromszög esetén nem létezik, mert csak ebben esik egybe O és M). Ezzel már igazoltuk az állítást, mert hasonlóan B_3, C_3 is pontja e-nek.



1. ábra

Messe az A_3-on átmenő $AB = c$-re merőleges egyenes AB-t C'-ben, e-t P-ben, továbbá az A_3-on átmenő, $AC = b$-re merőleges egyenes AC-t B'-ben, e-t Q-ban (2. ábra).



2. ábra

Azt fogjuk megmutatni, hogy P és Q egybeesik; ebből következik, hogy azonosak A_3-mal, mert c és b nem párhuzamosak.

Minthogy M és O egyrészt a c-re C_1 és C_2-ben, másrészt a b-re B_1 és B_2-ben emelt merőlegesek metszéspontja, azért a b, e egyenespárt 3 párhuzamos egyenes metszi át, így

$$(1) \qquad MQ : QO = B_1B' : B'B_2.$$

Hasonlóan a c, e egyenespáron levő metszetekre

$$(2) \qquad MP : PO = C_1C' : C'C_2.$$

Így azt kell belátnunk, hogy (1) és (2) második arányai egyenlők.

Ehhez felhasználjuk, hogy az A_3 előállításában szereplő B_1, C_1, B_2, C_2 pontok egy körön vannak, éspedig az $A_2B_2C_2$ háromszög k körülírt körén (az ABC háromszög ún. Feuerbach-féle körén). Elég pl. B_1-re megmutatni, hogy k-n van. Valóban, az A_2, B_2, B_1, C_1 csúcsokkal meghatározott konvex négyszög szimmetrikus trapéz, tehát körbe írható. Ugyanis $A_2C_2 \parallel B_1B_2$, az A_2B_2 és C_2B_1 szakaszok (vagy mindkettő oldal, vagy mindkettő átló) egyenlők $AB/2$-vel, – C_2B_1 azért, mert B_1 rajta van az AB átmérő fölötti Thalész-körön, melynek középpontja C_2 –, végül a négyszög általában nem paralelogramma, mert B_1 általában különbözik A és C-től, az AC egyenes azon két pontjától, amelyek A_2, B_2, C_2-t paralelogrammává egészítik ki; ha pedig pl. $B_1 \equiv C$, akkor a négyszög téglalap és ezért körbe írható.

Eszerint a B_1C_2, C_1B_2 szakaszpár a végpontjaikkal mint csúcsokkal meghatározott konvex húrnégyszögnek vagy a két átlóját adja (ilyen az 1. ábrán A_3), vagy két szemben fekvő oldalát (ilyen jellegű az 1. ábra B_3 pontja, persze minden A betűt B-re cserélve és viszont). Ezért az $A_3B_1B_2$ és $A_3C_1C_2$ háromszögek mindenképpen hasonlók, mert szögeik rendre egyenlők (kerületi szögek, csúcsszögek, közös szögek). Ennélfogva valóban áll

$$B_1B' : B'B_2 = C_1C' : C'C_2,$$

mert hasonló háromszögekben bármely megfelelő szakaszok aránya egyenlő, és itt az A_3-ban összefutó oldalaknak a szemben levő oldalon levő vetületeiről van szó. Ezzel az állítást általában bebizonyítottuk.

Bizonyításunkat ki kell egészítenünk az olyan esetek vizsgálatával, ha a B_1, B_2 és C_1, C_2 párok egyike, pl. az első – egybeesik, mert ekkor $A_3 \equiv B_2 \equiv B_1$ az $A_3B_1B_2$ háromszög elfajul ponttá. Így azonban állításunk nyilvánvaló, mert ekkor az ABC háromszög egyenlő szárú: $BA = BC$, tehát e azonos a szimmetriatengellyel, és így átmegy A_3-on. Ha pedig $B_1 \equiv B_2$ és $C_1 \equiv C_2$ akkor ABC egyenlő oldalú, A_3, B_3, C_3 határozatlanok.

Ha a háromszögnek csak egy szöge $60°$-os, pl. α, vagy ha $\alpha = 120°$, akkor – mint az 541. gyakorlatban láttuk – B_1C_2 és C_1B_2 párhuzamosak, A_3 nem létezik. Fenti bizonyításunk szerint B_3 és C_3 ekkor is e-n vannak. Megmutatjuk, hogy ilyenkor B_1C_2 és C_1B_2 párhuzamosak e-vel. Feltevésünk folytán $AB_1 = AB/2 = AC_2$, $AC_1 = AC/2 = AB_2$ és így B_1 és C_2, valamint C_1 és B_2 egymásnak tükrös párjai az α belső, ill. külső felezőjére, ezért B_1C_2 és C_1B_2 merőlegesek e felezőre. Másrészt ugyanez áll e-re is, mert a C_1AB_1M és B_2AC_2O négyszögek egybevágók, ugyanis 2–2 megfelelő oldaluk és 3–3 megfelelő szögük egyenlő, továbbá 3–3 megfelelő csúcsuk egymásnak fenti szög felezőjére tükrös párja, tehát M és O is tükrös pár.

Máté Attila (Szeged, Dózsa Gy. ált. isk. VII. o. t)

II. megoldás: Mint az I. megoldásban láttuk, a magasságtalppontok rajta vannak az oldalfelezőpontokkal meghatározott k körön. Ha e 6 pontot az A_1, B_2, C_1, A_2, B_1, C_2 sorrendben tekintjük egy a k-ba írt hatszög csúcsainak, akkor a szóban forgó egyenespárok 2–2 tagja e hatszögnek 2–2 szembenfekvő oldala. Ezért a kúpszeletbe írt hatszögre vonatkozó Pascal-féle tétel [1] szerint A_3, B_3, C_3 metszéspontjaik egy egyenesen vannak.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. III. o. t.)

Megjegyzés. A Pascal-tétel alapján a feladat állítását abból is bizonyíthatjuk, hogy A_3, B_3, C_3 bármelyike, pl. ismét A_3, rajta van az M-et a háromszög S súlypontjával összekötő egyenesen. Tekintsük az AB, AC egyenespárt elfajult k' kúpszeletnek. A $B_1BB_2C_1CC_2$ hatszög csúcsai k'-n vannak, tehát szemben fekvő oldalainak metszéspontjai: B_1B és C_1C-nek M, BB_2 és CC_2-nek S, végül B_2C_1, és C_2B_1-nek A_3 – egy egyenes pontjai. (Az M, S pontokkal meghatározott egyenes azonos a fentebbi MO egyenessel, a háromszög Euler-féle egyenesével.)

[1] Lásd pl. *Schopp János:* Kúpszeletek (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1955, 71. o. – *Vigassy Lajos:* Síkmértani szerkesztések térmértani megoldássa (Középiskolai Szakköri Füzetek), Tankönyvkiadó, 1957, 33. o.