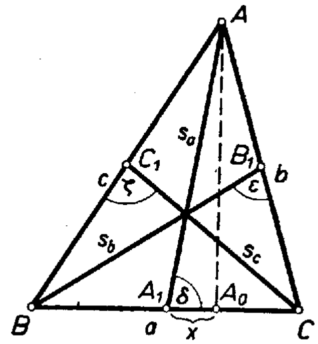
Legyenek a súlyvonalak végpontjai, vagyis az oldalak felezőpontjai rendre A_1, B_1, C_1. $b < c$, azaz $AC < BC$ folytán A a BC oldal felező merőlegesének azon a partján van, mint C, ezért az $AA_1 = s_a$ súlyvonal a δ hegyes szöget A_1C-vel zárja be.



Az AA_1C háromszögből a koszinusz-tétellel

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\cos\delta}{\sin\delta} = \frac{A_1A^2 + A_1C^2 - AC^2}{2A_1A \cdot A_1C\sin\delta} = \frac{s_a^2 + \dfrac{a^2}{4} - b^2}{4t_1}, \tag{1}$$

ahol t_1 az AA_1C háromszög területét jelöli, ami nyilván fele az ABC háromszög t területének. s_a^2-et kifejezhetjük a háromszög oldalaival. Ugyanis ismét az AA_1C, majd az AA_1B háromszögből $\cos(180^\circ - \delta) = -\cos\delta$ figyelembevételével

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + s_a^2 - as_a\cos\delta, \qquad c^2 = \frac{a^2}{4} + s_a^2 + as_a\cos\delta.$$

Ezek félösszegéből

$$s_a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{b^2 + c^2}{2},$$

és ezt, valamint a $t_1 = t/2$ kifejezést (1)-be helyettesítve

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{c^2 - b^2}{4t}.$$

Hasonlóan adódnak a

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{c^2 - a^2}{4t}, \qquad \operatorname{ctg}\zeta = \frac{b^2 - a^2}{4t}$$

kifejezések, és ezekből az állítás helyessége nyilvánvaló.

Gonda Júlia (Makó, József A. g. III. o. t.)

Megjegyzés. Lényegében ugyanígy, a koszinusz tételnek csupán látszólagos megkerülésével adódik $\operatorname{ctg}\delta$ fenti kifejezése az alábbi úton. Legyen az A-ból húzott m_a magasság talppontja A_0 és $A_1A_0 = x$. Ekkor $\operatorname{ctg}\delta = x/m_a$, ill. $am_a = 2t$ alapján $\operatorname{ctg}\delta = ax/2t$. Legyenek a c, b oldalak vetületei a-n $BA_0 = c_a$, $CA_0 = b_a$. Így ha γ hegyesszög vagy derékszög, akkor egyrészt $BA_1 = A_1\,C$-ből $c_a - x = b_a + x$, így $x = (c_a - b_a)/2$, másrészt $BC = BA_0 + A_0\,C$-ből $a = b_a + c_a$, ennélfogva $\operatorname{ctg}\delta$ számlálója $ax = (b_a + c_a)(c_a - b_a)/2 = (c_a^2 - b_a^2)/2 = \left[(c^2 - m_a^2) = (b^2 - m_a^2)\right]/2 = (c^2 - b^2)/2$. Ha pedig γ tompaszög, akkor $c_a - x = x - b_a$-ból $x = (c_a + b_a)/2$ és $a = c_a - b_a$ alapján ugyanaz a kifejezés adódik. – Vegyük észre, hogy a felhasznált gondolatok ugyanazok, mint a koszinusztétel legismertebb levezetésében: a BC oldalegyenesen az A_0 talppont által létrehozott szakaszok összege vagy különbsége a BC oldalt adja, és az ABA_0, ACA_0 háromszögek derékszögűek.

Knuth Előd (Budapest, I. István g. III. o. t.)