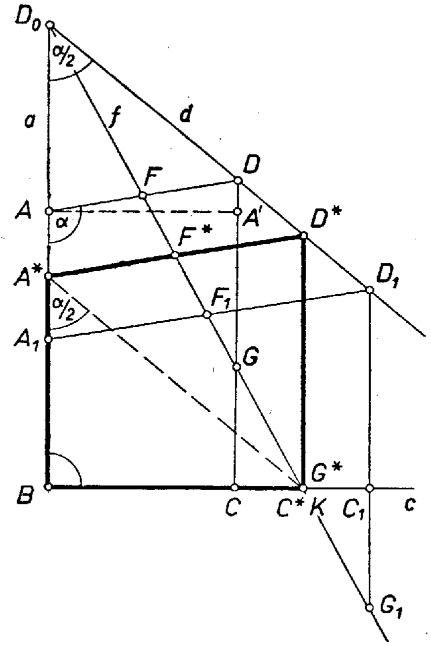
I. megoldás: A kérdéses trapézokban két szomszédos szög derékszög, a másik kettő általában ferde szög. A kérdést két esetben kellene vizsgálnunk aszerint, hogy az állandó összegű két szomszédos oldal között tetszés szerinti (0° és 180° közötti) szög, ill. derékszög van, azonban mindkettő speciális esete annak a feladatnak, amely az adott feladatból a „derékszögű" jelző elhagyásával keletkezik. Célszerű ezért előbb ezt az általánosabb feladatot megoldanunk. Tekintsük tehát azokat az a $ABCD = T$ trapézokat, amelyeknek párhuzamos oldalai AB és CD, bennük a BA és AD oldalak összege adott s állandó, továbbá BAD, valamint ABC szögük egy adott α, ill. β szöggel egyenlő.

Legyenek a síkon egy β nagyságú szög szárai az a és c félegyenesek. Helyezzük el valamennyi vizsgálandó trapézunkat úgy, hogy B csúcsuk a β szög csúcsába, A, C csúcsaik pedig a, ill. c-re essenek. Forgassuk bele valamennyi trapéz AD oldalát A körül a BA oldal meghosszabbításába; így valamennyi D csúcs az a szár azon D_0 pontjába jut, amelyre $BD_0 = s$ (1. ábra).



1. ábra

Az ADD_0 háromszögek egyenlő szárúak, és D_0-nál levő szögük $\alpha/2$, állandó, ennélfogva minden D csúcs azon a D_0-ból kiinduló d félegyenesen van, amely a D_0B félegyenessel a c-t tartalmazó oldalán $\alpha/2$ szöget zár be.

Avégett, hogy trapézaink területét összehasonlítsuk, próbáljunk mindegyikhez egy olyan vele egyenlő területű trapézt képezni, melyben az egyik alap D_0B, és egy további csúcs a c-n van. T-hez ilyen az a $D_0BCG = T'$ trapéz, amelynek G csúcsát az az egyenes metszi ki DC-ből, amely az AD szár F felezőpontját D_0-lal köti össze, – feltéve, hogy ez a G metszéspont a DC szakaszra vagy C-be esik (egyelőre csak az ilyen T-ket tekintjük). Így ugyanis a levágott FDG és a hozzávett FAD_0 háromszögek egybevágók, tehát T' területe valóban egyenlő T-ével.

D_0F a D_0AD háromszög D_0-ból induló súlyvonala. És mivel valamennyi D_0AD háromszög hasonló helyzetű – hasonlósági pontjuk D_0 –, azért az AD szár minden helyzetének F felezőpontja egy a D_0-on átmenő f egyenesen van rajta. Legyen f és c metszéspontja K. Így mindegyik tekintetbe vett T a $D_0BK = H$ háromszögnek része, nyilvánvaló tehát, hogy annak a T^*-nak a területe a legnagyobb, amelyben G és C a K-ba esik, és T^* területe egyenlő H területével.

Azon további T-k területéről, melyeknek DC oldalát f a C-n túli meghosszabbításban metszi, vagyis K-n túl (az 1. ábrán pl. $A_1BC_1D_1$), nyilvánvaló, hogy kisebb H területénél, éspedig annyival, amennyi a KC_1G_1 háromszög területe. Ennyivel kisebb ugyanis a T-ből az F_1K szakasszal levágott $F_1KC_1D_1$ négyszög területe a hozzávett $F_1A_1D_0$ háromszög területénél. – Ennélfogva a vizsgálandó trapézok közül T^* területe a legnagyobb.

Mindezek szerint T^*-ot az alábbi úton kaphatjuk. Az a-n felvett $BD_0 = s$ szakaszhoz D_0-ban meghúzzuk a vele $\alpha/2$ szöget bezáró d-t és B-ben a β szöget bezáró c-t. A D_0B-n tetszés szerint választott A körül AD_0 sugárral d-ből kimetsszük D-t, a D_0AD háromszöget kiegészítjük D_0AGD paralelogrammává, majd ennek D_0G átlójával c-ből kimetsszük $K \equiv C^*$-ot. Végül C^*-on át a-val, ill. d-vel párhuzamost húzva kimetsszük d-ből D^*-ot, a-ból A^*-ot.

A $D_0A^*C^*D^*$ paralelogramma hasonló D_0AGD-hez, ezért a $D_0A^*D^*$ háromszög hasonló D_0AD-hez, vagyis egyenlő szárú, tehát egyrészt $A^*D^* = A^*D_0$, és így $BA^*+A^*D^* = BD_0 = s$, másrészt $BA^*D^*\sphericalangle = A^*D_0D^*\sphericalangle+A^*D^*D_0\sphericalangle = \alpha$, ezek szerint T^* megfelel a követelményeknek.

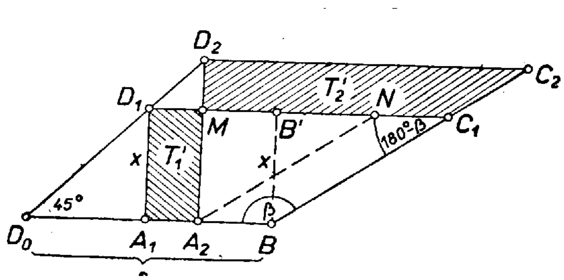
K egyértelműen létrejön, ha β és a $BD_0F = \delta$ szög összege kisebb 180°-nál. Továbbá az előálló T^* megfelelő, ha A^* a BD_0 szakaszra esik, ennek feltétele a BKA^* háromszögből: $\beta + \alpha/2 < 180^\circ$. Az utóbbi feltétel K létrejöveteléhez is elegendő, mert δ az $\alpha/2$-nek része, tehát kisebb annál.

Ezek szerint speciálisan $\beta = 90^\circ$-kal és tetszés szerinti 0° és 180° közti α-val feladatunk megoldható, mert $\alpha/2$ hegyesszög (ilyen eset az 1. ábra).

Ha viszont $\alpha = 90°$, akkor a $\beta + 45° < 180°$ feltétel alapján a fentiek szerint csak $\beta < 135°$ esetére kapunk megoldást.

$\beta = 135°$ esetében A^* a B-be esik, a trapéz elfajul egyenlő szárú derékszögű háromszöggé és az előírt β szög az idomban nem látható.

A $\beta \geq 135°$ esetekre megmutatjuk, hogy nincs legnagyobb területű valódi trapéz, mert ha $BA_1D_1C_1 = T_1$ és $BA_2D_2C_2 = T_2$ (2. ábra) teljesítik a követelményeket és $BA_2 < BA_1$, akkor T_2 területe nagyobb T_1 területénél, vagyis a terület a BA oldal csökkenésével nő.



2. ábra

Legyen D_1C_1 és A_2D_2 metszéspontja M, és messe az A_2-n át BC_1-gyel húzott párhuzamos D_1C_1-et N-ben. Így egyrészt $A_2A_1 = (BA_1 + A_1D_1) - (BA_2 + A_1D_1) = (BA_2 + A_2D_2) - (BA_2 + A_2M) = MD_2$, vagyis T_1 és T_2 nem közös részeiben, az $A_1A_2MD_1 = T_1'$ téglalapban és az $MC_1C_2D_2 = T_2'$ trapézban az egyik oldal, ill. a magasság egyenlő. Másrészt az A_2NM derékszögű háromszögben $A_2NM\sphericalangle = 180° - \beta \leq 45° \leq \beta - 90° = NA_2M\sphericalangle$, így $A_2M \leq MN < MC_1 < D_2C_2$, tehát T_2' területe nagyobb T_1' területénél, amit bizonyítani akartunk. – Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Összeállítva *Molnár Emil* (Győr, Révai M. g. III. o. t.),
Simonovits Miklós (Budapest, Radnóti M. g. II. o. t.)
és *Hornitzky Lajos* (Budapest, I. István g. III. o. t.)
dolgozataiból és diszkusszióval kiegészítve.

Valamennyi többi dolgozat számítással, legnagyobbrészt trigonometriai számítással készíti elő a szerkesztést. Ilyen a következő megoldás.

II. megoldás: 1. Legyen a derékszögű szár ismét BC, és $BAD\sphericalangle = \alpha$, $BA + AD = s$. A szerkesztés előkészítéséül α-ból és s-ből számítással állapítjuk meg a legnagyobb területtel bíró trapéz $AD = x$ „ferde” szárát. Nyilván csak a $0 < x < s$ értékekről lehet szó. – A-nak DC-n levő vetületét A'-vel jelölve $DC = A'C - DA' = AB - DA'$, ha α hegyesszög, és $DC = AB + DA'$, ha α tompaszög (1. ábra). Mivel DA' hosszát a $DA\cos\alpha = x\cos\alpha$ szorzat abszolút értéke adja, és $\cos\alpha$ hegyes és tompa szögekre ellentett jelű, azért a két kifejezést egybefoglalhatjuk:

$$DC = AB - x\cos\alpha = (s - x) - x\cos\alpha = s - x(1 + \cos\alpha).$$

Ennélfogva a trapéz középvonala $s - x - (x\cos\alpha)/2 = s - (2 + \cos\alpha)x/2$. Másrészt a magasság $AA' = x\sin\alpha$, és így a terület:

$$t = [sx - (2 + \cos\alpha)x^2/2]\sin\alpha.$$

Mivel a $\sin\alpha$ tényező pozitív állandó, elég megkeresni a

$$\frac{t}{\sin\alpha} = y_1 = sx - \frac{1}{2}(2 + \cos\alpha)x^2 \tag{1}$$

függvény legnagyobb értékét, ha $0 < x < s$.

y_1 az x-nek másodfokú függvénye, mert x^2 együtthatója bármely α esetén 0-tól különböző, éspedig negatív, hiszen $\cos\alpha > -1$. Ennek kiemelésével és teljes négyzetté kiegészítéssel (1) az

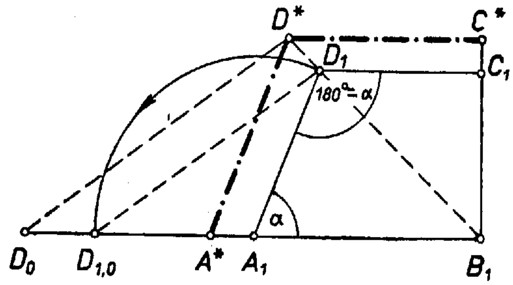
$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{1}{2}(2 + \cos\alpha)\left(x^2 - \frac{2s}{2 + \cos\alpha}x\right) = \\ &= -\frac{1}{2}(2 + \cos\alpha\left[\left(x - \frac{s}{2 + \cos\alpha}\right)^2 - \frac{s^2}{(2 + \cos\alpha)^2}\right] = \\ &= -\frac{1}{2}(2 + \cos\alpha)\left(x - \frac{s}{2 + \cos\alpha}\right)^2 + \frac{s^2}{2(2 + \cos\alpha)} \end{aligned}$$

alakban írható. Ebben csak az első tag változó, és értéke negatív vagy 0, mert, a kéttagú kifejezés négyzete pozitív vagy 0. Eszerint y_1-nek van legnagyobb értéke éspedig arra az x-re, amelyre a kéttagú értéke 0, vagyis ha

$$x = x^* = \frac{s}{2 + \cos\alpha}. \tag{2}$$

A szóba jövő α értékek mellett $2+\cos\alpha>1$. Így egyrészt $x^*<s$ (természetesen $s>0$), másrészt $x^*>0$, tehát x^* az x számára figyelembe jövő értékek közé tartozik.

A legnagyobb területű trapéz megszerkesztése során kézenfekvő x^*-ot pl. (2) alapján hasonló háromszögek felhasználásával előállítani. Vegyük észre azonban, hogy a keresett trapézben a fenti kifejezések és (2) alapján $DC=s-s(1+\cos\alpha)/(2+\cos\alpha)=s/(2+\cos\alpha)=x^*=AD$, vagyis az ADC háromszög egyenlő szárú. Tekintve még, hogy az A, D, C csúcsok hasonlóság erejéig meghatározzák $ABCD$-t, adódik a következő szerkesztés. Egy D_1 csúcsú, $180^\circ-\alpha$ nagyságú szög száraira egyenlő D_1A_1, és D_1C_1 szakaszokat mérünk (3. ábra).



3. ábra

D_1C_1-gyel A_1-en át párhuzamost, D_1C_1-re C_1-en át merőlegest húzunk, metszéspontjuk B_1. A_1D_1-et A_1 körül B_1A_1 meghosszabbítására forgatjuk, D_1 új helyzete $D_{1,0}$, B_1-től $D_{1,0}$ irányába felmérjük $B_1D_0=s$-et. A D_0-on át $D_{1,0}D_1$-gyel párhuzamos egyenesre B_1-ből rávetítjük D_1-et, a kapott D^*-n át D_1A_1, és D_1C_1-gyel húzott párhuzamosok az $A_1B_1C_1$ szög száraiból kimetszik A^* és C^*-ot, ekkor $A^*B_1C^*D^*$ a kívánt trapéz. Ez megfelel a követelményeknek, mert szögei az előírtak, másrészt a $D^*A^*D_0$ háromszög hasonló $D_1A_1D_{1,0}$-hoz, tehát egyenlő szárú és így $B_1A^*+A^*D^*=B_1A^*+A^*D_0=s$. A szerkesztés egyértelműen végrehajtható.

2. Legyen másodszor $BAD\sphericalangle=90^\circ$, $ABC\sphericalangle=\beta$, $BA+AD=s$, és $AD=x$, ahol $0<x<s$. Így $BA=s-x$, és a fentiekhez hasonlóan $DC=s-x-x\operatorname{ctg}\beta$ – mert a BC szár DC-n levő CB' vetületének hosszát (lásd a 2. ábrán C_1B'-ben) a BCB' derékszögű háromszögből a $BB'\operatorname{ctg}\beta=x\operatorname{ctg}\beta$ szorzat abszolút értéke adja és $\operatorname{ctg}\beta$ hegyes és tompa szögekre ellentett jelű. Így a középvonal $s-x-(x\operatorname{ctg}\beta)/2=s-(2+\operatorname{ctg}\beta)x/2$, másrészt a magasság x, tehát a terület:

$$t=y_2=sx-\frac{1}{2}(2+\operatorname{ctg}\beta)x^2.$$

Ennek az előbbiekhez hasonlóan legnagyobb értéke van az

$$x^*=\frac{s}{2+\operatorname{ctg}\beta}$$

helyen, ha $2+\operatorname{ctg}\beta$ pozitív, vagyis $\operatorname{ctg}\beta>-2$. x^* akkor esik 0 és s közé, ha $2+\operatorname{ctg}\beta>1$, vagyis $\operatorname{ctg}\beta>-1$, $\beta<135^\circ$. Ilyenkor itt is áll $D^*C^*=x^*=A^*D^*$, ennek alapján a fenti hasonlósági transzformáció ismét használható, $180^\circ-\alpha$ helyett 90°-ot és $D_1C_1B_1\sphericalangle=90^\circ$ helyett $180^\circ-\beta$ szöget használva. $\beta<135^\circ$ és $D^*A^*=D^*C^*$ folytán a trapéz konvex és nem fajul el.

Ha $\beta=135^\circ$, akkor $2+\operatorname{ctg}\beta=1$, és $x^*=A^*D^*=s$, $BA^*=0$, vagyis a legnagyobb területű trapéz elfajul. (Az $x=s$ értéket éppen az elfajult esetek kiküszöbölése végett zártuk ki.) Ugyanez adódik a $\beta>135^\circ$ esetekre a következő meggondolásokból.

Ha $0<2+\operatorname{ctg}\beta<1$, vagyis $135^\circ<\beta<153{,}4^\circ$, akkor y_2 képe olyan parabola, melynek csúcsa „fönt" van, y_2 az $x^*>s$ helyen veszi fel legnagyobb értékét, az $x<x^*$ értékekre növekvő. Ide esnek a minket érdeklő $0<x<s$ értékek, közülük ismét az $x=s$-nél volna legnagyobb y_2 értéke.

$2+\operatorname{ctg}\beta=0$, $\beta\approx153{,}4^\circ$ esetén y_2 növekvő elsőfokú függvény.

$2+\operatorname{ctg}\beta<0$ esetén y_2-ben x^2 együtthatója pozitív, y_2 képének „lent" van a csúcsa, de ennek x^* abszcisszája negatív, így a minket érdeklő $0<x<s$ értékekre y_2 ismét növekvő, legnagyobb volna a meg nem engedett $x=s$-nél.

Ezzel vizsgálatunkat befejeztük.

Összeállítva *Hajna János* (Pécs, Széchenyi I. g. IV. o. t.)
és *Máté Zsolt* (Szeged, Radnóti M. g. IV. o. t.)
dolgozataiból, kiegészítésekkel és rövidítésekkel.

Megjegyzések. A beérkezett dolgozatok szerzőinek javarésze sok munkát fektetett megoldásába, ezért az átlagosnál több probléma, téves nézet merült fel. Alább néhányat szóvá teszünk.

1. Sok oda nem való elem tapad a trapéz fogalmához. 1. ábránkon éppen avégett forgattuk el a trapézt a „hagyományos" helyzetből, hogy olvasóinkat a geometriai tényeknek bármely helyzetben való felismerésére szoktassuk. Háromszögeknél nem ütközünk meg azon, hogy nem minden magasság „függőleges", így a trapézok alapjairól se higgyük, hogy okvetlen „vízszintesek", – amint nem egy dolgozat írta. Még többen voltak, akik lényeges különbséget tettek az alsó és a felső (a nagyobb és a kisebb) alap között, és a kérdést 4 esetben vizsgálták aszerint, amint az $a+b$, $a+d$, $c+b$, $c+d$ összeg állandó (a és c a párhuzamos oldalak, $a>c$, és b a merőleges szár). Ez egyfelől helyes körültekintés,

teljességre való törekvés, másfelől van benne lényeg nem látás is. Nem egy ilyen dolgozat kimondta pl. az $a+b=s$ és $c+b=s$ esetek hasonlóságát (pl. így: „semmi újat nem mond”), de nem jutott el a két eset összevonásáig.

2. Jónéhány dolgozat szükségtelenül a differenciálszámításnak a függvények szélső értékei megállapítására vonatkozó módszereiből alkalmazta a legismertebbet, hogy ti. bizonyos egyszerű függvényeknek csak ott *lehet* helyi szélső értékük, ahol differenciálhányadosuk értéke 0. Azt azonban már többnyire nem vizsgálták e dolgozatok, hogy valóban *van-e* a kérdéses helyen szélső érték, és ha van, akkor milyen természetű, és hogy a kérdéses hely beleesik-e a változó számára figyelembe veendő intervallumba. Megfelelő diszkusszió nélkül e tanulók ugyanúgy hibás eredményekre jutottak vagy juthattak volna, amint a differenciálszámítás kialakulásának kezdetén egyes kutatók téves megállapításokra jutottak.

3. Szórványosan előfordult a szövegnek az a téves értelmezése, hogy *minden* két szomszédos oldal összege állandó. Így nem volna változási lehetőség.

4. Több jó dolgozat annyira csupán számítási kérdésnek tekintette a feladatot, hogy a szerkesztésről csak efféle megjegyzést tett: „az eredmények megszerkeszthetők”; ezek kissé hiányosak.