Képezzük a két oldal különbségét, igyekezve közös nevezőre hozás után a számlálót szorzattá alakítani. Hozzuk először közös nevezőre a két oldal első tagjainak különbségét, ebből megkapjuk a második tagok különbségét is, ha a helyébe c-t, b helyébe d-t írunk:

$$\frac{ax+b}{a+bx}-\frac{ax-b}{a-bx}=\frac{\left[-abx^2+(a^2-b^2)x+ab\right]-\left[abx^2+(a^2-b^2)x-ab\right]}{a^2-b^2x^2}=$$
$$=\frac{2ab(1-x^2)}{a^2-b^2x^2},$$

tehát egyenletünk két oldalának különbsége a következő alakban írható:

$$(2)\qquad \frac{2ab(1-x^2)}{a^2-b^2x^2}+\frac{2cd(1-x^2)}{c^2-d^2x^2}=$$
$$=\frac{2(1-x^2)\left[ab(c^2-d^2x^2)+cd(a^2-b^2x^2)\right]}{(a^2-b^2x^2)(c^2-d^2x^2)}=\frac{2(1-x^2)(ad+bc)(ac-bdx^2)}{(a^2-b^2x^2)(c^2-d^2x^2)}.$$

Ez a kifejezés csak ott lehet 0, ahol vagy az $1-x^2$, vagy az $ac-bdx^2$ kifejezés eltűnik, tehát csak az

$$x_{1,2}=\pm 1 \qquad \text{és} \qquad x_{3,4}=\pm\sqrt{\frac{ac}{bd}}$$

helyeken, feltéve, hogy $ad+bc\neq 0$. E feltétel mellett tehát csak az említett 4 szám lehet gyöke az egyenletnek. Ezek mind gyökei az (1) egyenletnek, mivel a két oldal különbségére csak azonos átalakításokat alkalmaztunk, – kivéve ha szerepel köztük olyan érték, amelyre a nevező eltűnik. 4-nél kevesebb különböző gyököt kapunk akkor is, ha a gyökök közt vannak egyenlők, továbbá ha ac és bd ellenkező előjelű, mert ekkor $ac-bdx^2$ nem tűnik el a valós számok körében. Meg kell vizsgálnunk, hogy a, b, c, d milyen értékei mellett fordulhatnak elő ezek az esetek.

Egyelőre feltesszük, hogy a paraméterek egyike sem 0. Az $ad+bc=0$ esetben (2) bármely olyan x-szel eltűnik, amely mellett van értelme, és így (1) elfajul azonossággá. Valóban, ekkor $ad=-bc$-ből $d/b=-c/a=k(\neq 0)$, így $d=bk$, $c=-ak$, ezért

$$\frac{cx+d}{c+dx}=\frac{-akx+bk}{-ak+bkx}=\frac{-k(ax-b)}{-k(a-bx)}=\frac{ax-b}{a-bx},$$

ugyanígy

$$\frac{cx-d}{c-dx}=\frac{ax+b}{a+bx},$$

vagyis a jobb oldal két törtje (fordított sorrendben) azonos a bal oldal egy-egy törtjével. – Ha fennáll $ad+bc=0$, akkor az ad és bc szorzatok ellentett előjelűek, így a két tényező előjele egyikükben megegyező, másikukban ellentétes, tehát a, b, c, d között vagy 3 pozitív, vagy pedig 3 negatív szám szerepel.

Nem fogadhatjuk el megoldásnak a $\pm a/b$ és a $\pm c/d$ számokat, mert ezek mellett (1)-ben legalább egy tört kifejezésnek nincs értelme.

Az $x_1=1$ érték akkor egyenlő a kizárt értékek valamelyikével, ha $a=\pm b$, vagy $c=\pm d$, azaz $a\pm b=0$, vagy $c\pm d=0$, ill. a négy esetet összefoglalva, ha $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=0$; minden ilyen esetben – és csak ezen esetekben – $x_2=-1$ is kizárt érték.

Hasonlóan akkor áll be az

$$x_3=+\sqrt{\frac{ac}{bd}}=\frac{a}{b},\ \text{vagy}\ -\frac{a}{b},\ \text{ill.}\ \frac{c}{d},\ \text{vagy}\ -\frac{c}{d}$$

egyenlőségek bármelyike, ha $ad=bc$, és e feltétel teljesülése esetén x_4 is kizárt érték, ugyanis pl. $\sqrt{ac/bd}=a/b$-ből négyzetreemeléssel és osztással $c/d=a/b$, vagyis $bc=ad$.

$x_{3,4}$ akkor különböző $x_{1,2}$-től ha $ac/bd\neq 1$.

Összefoglalva: ha a, b, c, d mindegyike 0-tól különböző, akkor (1) gyökei:

$$x_{1,2}=\pm 1, \quad \text{ha} \quad ad+bc\neq 0 \quad \text{és} \quad (a^2-b^2)(c^2-d^2)\neq 0, \quad \text{továbbá}$$

$x_{3,4}=\pm\sqrt{ac/bd}$, ha az ac/bd hányados 1-től különböző, pozitív szám és $ad\neq bc$.

Eredményeink akkor is érvényesek, ha a paraméterek számára megengedjük a 0-értéket. Így is csak egyikük lehet 0, ugyanis ha legalább kettőjük 0, akkor vagy (1) értelmetlen – ha ti. $a=b=0$, vagy $c=d=0$ –, vagy (2) szerint (1) elfajul azonossággá – ha ti. $a=c=0$, vagy $b=d=0$, ill. $a=d=0$, vagy $b=c=0$, mert így $ad+bc=0$. – Ha már most pl. $a=0$ és $bcd\neq 0$, ez $x_{1,2}$-t nem befolyásolja; viszont $x_{3,4}=0$, de ez nem gyök, mert így az $a/b=0$ szám meg nem engedett érték; a $c=0$, $abd\neq 0$ eset lényegében ugyanilyen. Ha pedig $b=0$ és $acd\neq 0$ (vagy $d=0$ és $abc\neq 0$), akkor (2)-ből csak $x_{1,2}=\pm 1$, ha $c^2\neq d^2$.

Szilassi Lajos (Orosháza, Táncsics M. g. III. o. t.)