I. Megoldás: Az y_k sorozat első négy tagjára az állítás igaz: $y_1 = 3 = 2^2 - 1$; $y_2 = 17 = 4^2 + 1$; $y_3 = 99 = 10^2 - 1$; $y_4 = 577 = 24^2 + 1$.

Tekintsük a sorozat páros indexű tagjait, legyen $k = 2s$. Válasszuk az 1008. feladat (1) második összefüggésében k és r mindegyikét s-nek:

(1) $$y_{k+r} = y_{2s} = y_s^2 + 2x_s^2.$$

x_s és y_s-re az 539. gyakorlat szerint teljesül

(2) $$y_s^2 = 2x_s^2 + 1,$$

ezt (1)-be helyettesítve

(3) $$y_{2s} = 4x_s^2 + 1 = (2x_s)^2 + 1.$$

$k = 2s + 1$ esetén az eredeti értelmezés szerint $y_{2s+1} = 4x_{2s} + 3y_{2s}$. Ide az 1008. feladat (1) első összefüggése alapján, ismét $k = r = s$-sel

(4) $$x_{k+r} = x_{2s} = 2x_s y_s,$$

tehát (1) felhasználásával

$$y_{2s+1} = 8x_s y_s + 3(y_s^2 + 2x_s^2)$$

és folytatólag (2) figyelembevételével

(5) $$\begin{aligned} y_{2s+1} = 8x_s y_s + (3y_s^2 + 2x_s^2) + 4x_s^2 = 4x_s^2 + 8x_s y_s + (4y_s^2 - 1) = \\ = \left[2(x_s + y_s)\right]^2 - 1. \end{aligned}$$

(5) és (3) szerint y_{2s+1} valóban 1-gyel kisebb, y_{2s} pedig 1-gyel nagyobb egy páros szám négyzeténél, az állításnak megfelelően.

Sylvester Ádám (Budapest, Rákóczi F. g. III. o. t.)

II. megoldás: Megmutatjuk, hogy minden y_k páratlan és váltakozva $4m + 3$ és $4m + 1$ alakú, ahol m egész. Állításunk első része $k = 1$-re igaz. Ha pedig k olyan szám, amelyre igaz, akkor $k+1$ is ilyen szám, mert $y_{k+1} = 4x_k + 3y_k$-ban az első tag páros, a második páratlan, így az összeg is páratlan. – Állításunk második része $k = 1$ és 2-re teljesül, és így írható:

$$y_1 = 3 = 4 \cdot 0 + 3 = 4 \cdot 0 + 2 - (-1)^1,$$
$$y_2 = 17 = 4 \cdot 4 + 1 = 4 \cdot 4 + 2 - (-1)^2.$$

Ha már most k olyan szám, hogy

$$y_k = 4m + 2 - (-1)^k,$$

akkor, 3-at $4 - 1$ alakban írva

$$\begin{aligned} y_{k+1} = 4x_k + 3y_k = 4(x_k + y_k) - y_k = 4(x_k + y_k - m - 1) + 2 + (-1)^k = \\ = 4m + 2 - (-1)^{k+1}, \end{aligned}$$

vagyis állításunk utóbbi része is helyes.

Az 539. gyakorlat tétele szerint minden k sorszámra

$$2x_k^2 = y_k^2 - 1 = (y_k - 1)(y_k + 1).$$

Segédtételünk első része szerint a jobb oldal mindkét tényezője páros, írhatjuk tehát

$$y_k - 1 = 2u, \quad y_k + 1 = 2u + 2 = 2(u + 1),$$

és így

$$x_k^2 = 2u(u + 1).$$

Itt u és $u + 1$ szomszédos természetes számok, tehát relatív prímek és egyikük páros.

Ha u páratlan, akkor u és $2(u + 1)$ is relatív prímek, szorzatuk csak úgy lehet teljes négyzet, ha külön-külön is teljes négyzetek:

(6) $$u = p^2, \quad 2(u + 1) = q^2, \quad \text{tehát} \quad y_k = 2u + 1 = q^2 - 1.$$

Ha u páros, akkor $2u$ és $u+1$ relatív prímek és hasonlóan

$$2u=r^2, \quad u+1=s^2, \quad \text{tehát} \quad y_k=r^2+1. \tag{7}$$

Segédtételünk második része szerint

$$u=\frac{y_k-1}{2}=\frac{4m+1-1(-1)^k}{2}=2m+\frac{1-(-1)^k}{2},$$

és ez váltakozva $2m+1$, ill. $2m$ alakú, így k növekedésével váltakozva (6), ill. (7) teljesül. Ezt kellett bizonyítanunk.

Megjegyzések. I. A II. megoldásból mellékeredményként kapjuk, hagy páratlan, ill. páros k-ra, és ugyanilyen u-ra

$$u=\frac{y_k-1}{2}=p^2, \quad \text{ill.} \quad u+1=\frac{y_k+1}{2}=s^2,$$

tehát

$$y_k=2p^2 \qquad\qquad y_k=2s^2-1,$$

ahol p és s páratlanok, vagyis y_k váltakozva felső, ill. alsó szomszédja egy páratlan szám négyzete 2-szeresének.

2. Az 1008. feladatban bebizonyított (1) összefüggések, valamint az ezekből itt nyert (1) és (4) lehetővé teszik a sorozatpár egyes kívánt tagjainak gyorsabb, kevesebb közbülső tag előállítását igénylő kiszámítását. Keressük pl. x_{11} és y_{11} értékét. (4) és (1) alapján a közbülső tagok kiszámítása nélkül előállíthatjuk azokat az x_n, y_n számpárokat, amelyeknek sorszáma $2, 4, 8, 16, \ldots$ Így $x_2=12$, $y_2=17$, $x_4=408$, $y_4=577$, $x_8=470\,832$, $y_8=665\,857$. Mivel pedig 11=8+3=8+2+1, azért tovább (1)-ben k és r értékét előbb 2 és 1-nek, majd 8 és 3-nak véve $x_3=70$, $y_3=99$ és

$$x_{11}=70\cdot 665\,857+99\cdot 470\,832=93\,222\,358,$$
$$y_{11}=99\cdot 665\,857+2\cdot 70\cdot 470\,832=131\,836\,323.$$

Minden természetes szám egyértelműen felírható a „2” szám alkalmas (pozitív egész kitevőjű) hatványaiból képezett összegként (2-es számrendszer), ezért a bemutatott példa mintájára bármely x_n, y_n számpárt kiszámíthatunk lehetőleg kevés közbülső tag megállapítása útján.