Maximum- és minimumproblémák elemi tárgyalása.

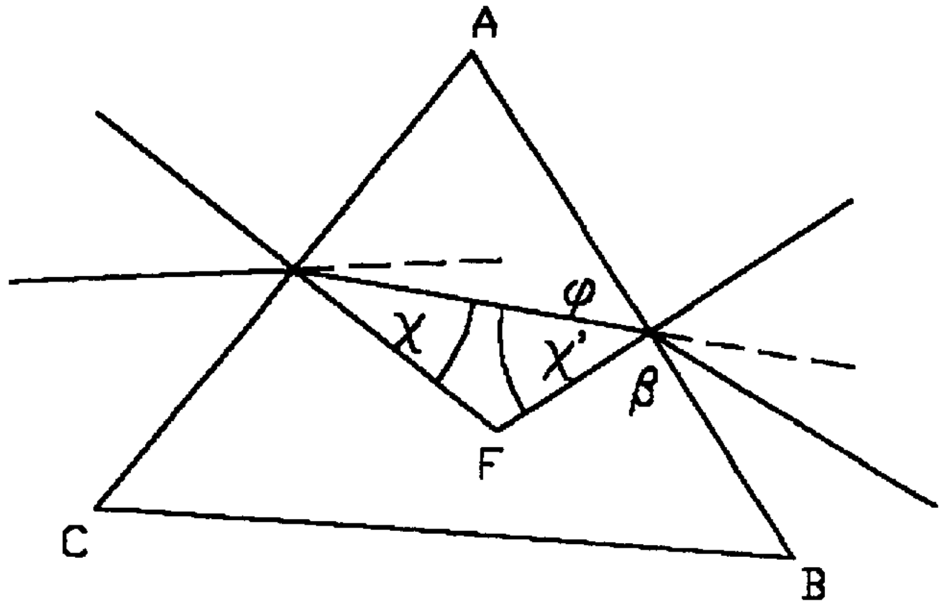
(Vége.)

IV.

Vannak oly maximum- és minimum problémák, melyeknek elemi tárgyalása eszközölhető ugyan, de a követett módszer az eddig ismertetettektől teljesen elütő és úgyszólván csak az illető problémára alkalmas. Lássunk két ilyen feladatot, melynek tárgya az optikából van választva.

4. *A fénytani hasáb egyik határlapjára eső (belépő) sugárnak a hasáb másik határlapján kilépő sugárral képezett szöge, az eltérítési szög φ, akkor legkisebb, ha a belépési szög egyenlő a kilépési szöggel.*

Jelelje i a szöget, melyet a belépő sugár az első határlapra merőleges egyenessel, a *beesési merőlegessel* képez, r a megtört sugár szögét ugyanazon merőlegessel. Hasonlóképpen jeleljék r' és i' a hasábban haladó és a második határlapon kilépő sugarak szögeit a második határlapra merőleges egyenessel. Végül legyen α a hasáb törőszöge és φ az eltérési szög. (1. ábra.)



1. ábra

Az EFD háromszögből látjuk, hogy

$$r + r' = \alpha \tag{1}$$

és a DEG háromszögből, hogy

$$\varphi = i - r + i' - r'$$

$$\varphi = i + i' - \alpha \tag{2}$$

A törő hasáb törés mutatója n tudvalevőleg $\dfrac{\sin i}{\sin r}$ vagy $\dfrac{\sin i'}{\sin r'}$, mit még a következő egyenletekkel fejezhetünk ki:

$$\sin i = n \sin r \tag{3}$$

$$\sin i' = n \sin r' \tag{4}$$

Ha a 4) egyenletet a 3)-hoz hozzáadjuk és ugyanabból másodszor levonjuk, kapjuk a következőket.

$$\sin i + \sin i' = n(\sin r + \sin r'),$$

$$\sin i - \sin i' = n(\sin r - \sin r').$$

Ez utóbbiak, mint a geometriából ismeretes a következő alakra hozhatók:

$$\sin \frac{1}{2}(i + i') \cos \frac{1}{2}(i - i') = n \sin \frac{1}{2}(r + r') \cos \frac{1}{2}(r - r') \tag{5}$$

$$\cos \frac{1}{2}(i + i') \sin \frac{1}{2}(i - i') = n \cos \frac{1}{2}(r + r') \sin \frac{1}{2}(r - r') \tag{6}$$

Ha a most nyert két egyenlet elsejét elosztjuk a másodikkal lesz:

$$\tan\frac{1}{2}(i+i')\cot\frac{1}{2}(i-i') = \tan\frac{1}{2}(r+r')\cot\frac{1}{2}(r-r')$$

vagy még másképp:

$$\tan\frac{1}{2}(i+i')\tan\frac{1}{2}(r-r') = \tan\frac{1}{2}(r+r')\tan\frac{1}{2}(i-i') \tag{7)}$$

Minthogy levegőből üvegbe lépő sugarakról van szó, n a törésmutató nagyobb az egységnél és i meg i' nagyobbak r és r'-nél. Tehát

$$\frac{1}{2}(i+i') > \frac{1}{2}(r+r')$$

$$\tan\frac{1}{2}(i+i') > \tan\frac{1}{2}(r+r')$$

Ha tehát $i \gtrless i'$, a mikor egyszersmind $r \gtrless r'$, a 7)-ből következik, hogy

$$\tan\frac{1}{2}(r-r') < \tan\frac{1}{2}(i-i')$$

$$\frac{1}{2}(r-r') < \frac{1}{2}(i-i')$$

De ez utóbbi egyenlettel egyidejűleg áll fenn a következő:

$$\cos\frac{1}{2}(r-r') > \cos\frac{1}{2}(i-i').$$

Ez pedig az 5)-tel egybevetve a következőt eredményezi:

$$\sin\frac{1}{2}(i+i') > n\sin\frac{1}{2}(r+r')$$

$$\sin\frac{1}{2}(i+i') > n\sin\frac{1}{2}\alpha \qquad i \gtrless i'$$

míg, ha $i = i'$

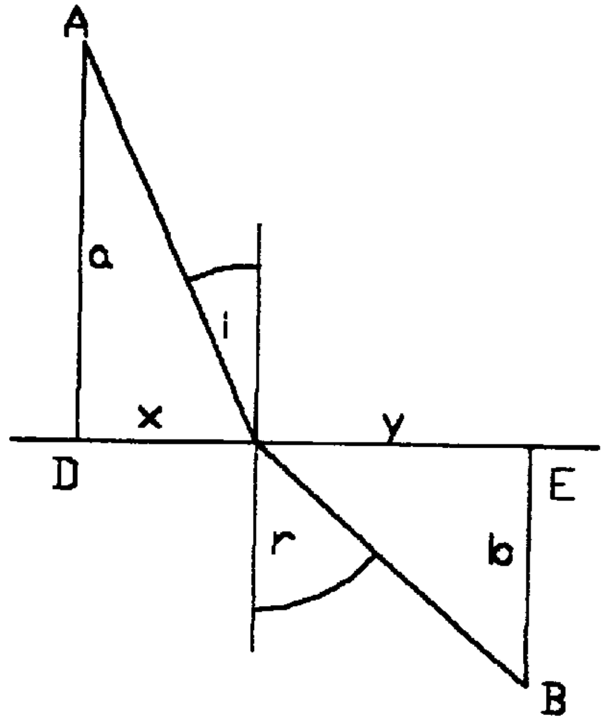
$$\sin\frac{1}{2}(i+i') = n\sin\frac{1}{2}(r+r') = n\sin\frac{1}{2}\alpha$$

Így tehát $\sin\frac{1}{2}(i+i')$-nek és vele $(i+i')$-nek legkisebb értéke akkor jön létre, ha $i = i'$.

De φ az $(i+i')$-tel egyidejűleg növekedik és fogy és így φ -nek *minimális* értéke akkor áll be, ha $i = i'$.

5. *Az A pontból kiinduló fénysugár a törő közegben lévő B pontba oly ACB úton halad, hogy ez út megfutására szükséges idő a lehető legkisebb.*

Jeleljük az A pontnak távolságát a törő közeg határától $AD = a$-val, a B pontét $BE = b$-vel; a DE hosszat c-vel. Minthogy a két különféle közegben a fénysugár külömböző c és c' sebességekkel halad, lesz az ACB út megfutására szükségeltetett idő (2. ábra.)



2. ábra

$$t = \frac{AC}{c} + \frac{CB}{c'}$$

Minthogy pedig

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = a^2 + x^2$$
$$CB^2 = BE^2 + CE^2 = b^2 + y^2$$

hol még

$$x + y = c,$$

az idő még a következő egyenletek által határoztatik meg

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} + \frac{\sqrt{b^2 + y^2}}{c'}, \qquad x + y - c = 0$$

Hogy a t minimális értéke az x és y mely értékénél következik be, azt megtudjuk, ha a t értékét a következtő alakban írjuk:

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} - kx + \frac{\sqrt{b^2 + y^2}}{c'} - ky + kc \tag{1)}$$

hol k tetszésszerinti állandó szám.

A t értéke minimum, ha a

$$\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} - kx \tag{2)}$$

és

$$\frac{\sqrt{b^2 + y^2}}{c'} - ky \tag{3)}$$

értékek minimumok.

Az

$$\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} - kx\right)^2 - \left(k\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x}{c}\right)^2 = a^2\left(\frac{1}{c^2} - k^2\right)$$

azonos egyenletből következik, hogy

$$\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c} - kx\right)^2$$

és vele együtt a 2) alatti kifejezés akkor minimum, ha

$$k\sqrt{a^2+x^2}-\frac{x}{c}=0$$

vagyis, ha

$$k=\frac{x}{c\sqrt{a^2+x^2}} \tag{4}$$

Hasonlóképpen minimum a 3) alatti kifejezés, ha

$$k=\frac{y}{c'\sqrt{b^2+y^2}} \tag{5}$$

De

$$\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}=\sin i$$

és

$$\frac{y}{\sqrt{b^2+y^2}}=\sin r$$

tehát a 4)-ből és 5)-ből

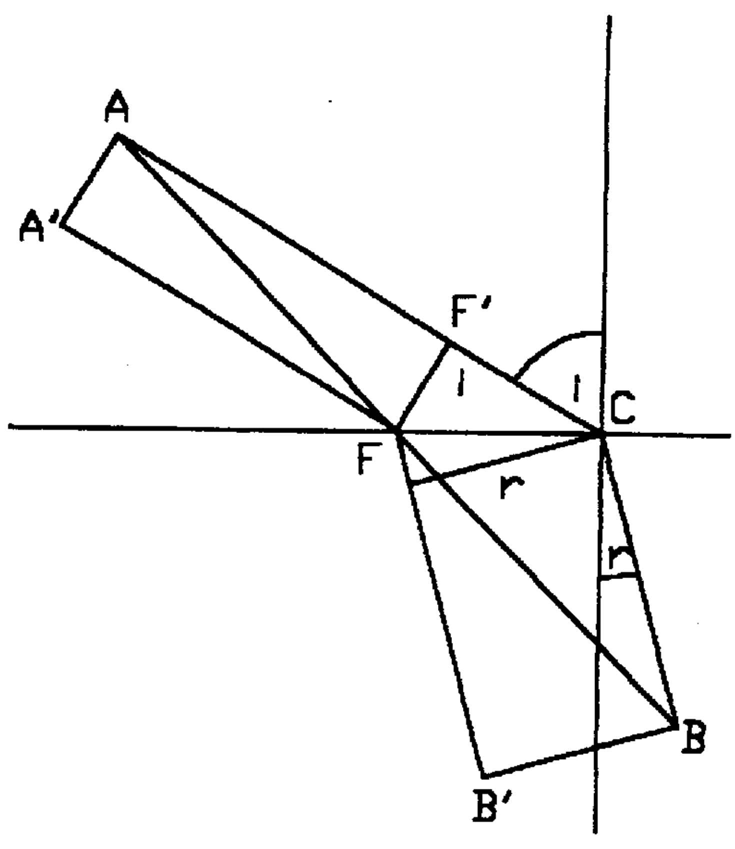
$$\frac{\sin r}{c'}=\frac{\sin i}{c}$$

$$\frac{\sin i}{\sin r}=\frac{c}{c'} \tag{6}$$

Ez utóbbi egyenlet azonban azon törvénynek kifejezése, mely a beeső és a megtörött sugárnak a beesés merőlegessel képezett szögei között a relácziót megállapítja.

Hogy az ACB út befutására szükségeltetett idő rövidebb az AB egyenes vagy bármely más AGB út befutására szükségeltetett időnél az *Huyghens* szerint a következőképpen is meg lehet mutatni.

Húzzunk az F pontból, melyben az AB egyenes a törő közeg határát átmetszi párhuzamosokat a CA és CB egyenesekkel és emeljük rájuk az AA' és BB' merőlegeseket. Rajzoljuk meg továbbá az $FF' \perp AC$ és $CC' \perp FB'$ egyeneseket. (3. ábra.)



3. ábra

Most közvetlen szemlélet mutatja, hogy az AF' és $A'F$, CB és $C'B'$ utak befutására szükséges idők:

$$\frac{F'C}{c} \quad \text{és} \quad \frac{FC'}{c'}$$

továbbá $F'C = FC \sin i$

$$FC' = FC \sin r$$

tehát

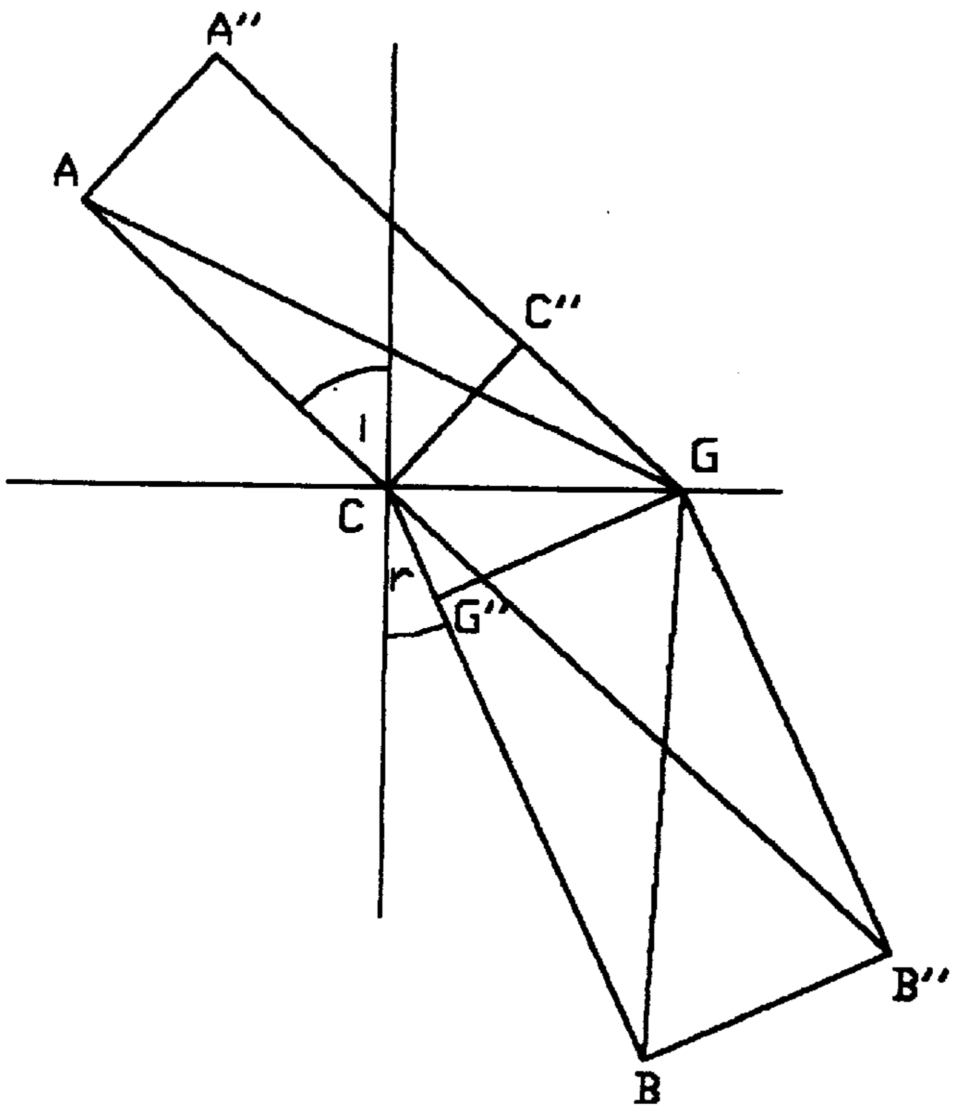
$$\frac{F'C}{c} = \frac{FC \sin i}{c}$$

$$\frac{FC'}{c'} = \frac{FC \sin r}{c'}$$

Ez utóbbiak azonban egyenlők egymással s így az ACB út befutására szükségelt idő egyenlő az $A'FB'$ út befutására szükségelt idővel. De ez utóbbi kisebb az AFB út befutására szükségelt időnél, mert

$$A'F < AF$$

$$FB' < FB$$



4. ábra

Hasonlóképpen látható a *4. ábrából*, hogy $A''C''GB'$ út befutására szükségelt idő egyenlő az ACB út befutására szükségelt idővel. Az AGB utat a fénysugár tehát hosszabb idő alatt futja be, mint az $A''GB''$ utat, mert

$$AG > A''G$$

és

$$GB > GB''.$$