Maximum- és minimumproblémák elemi tárgyalása.

Folytatás

II.

Számos maximum- és minimumprobléma elemi megoldása elvégezhető a kövtkező két theorema alapján.

I. Theorema. Ha a P pozitív számot felbontjuk n pozitív tényezőre e tényezők összege S akkor minimum, ha az n tényező mind egyenlő egymással és egyenlő $\sqrt[n]{P}$-vel.

II. Theorema. Ha az S pozitív számot felbontjuk n pozitív összeadandóra ez összeadandók szorzata P akkor maximum, ha az n összeadandó mind egyenlő egymással és egyenlő $\frac{S}{n}$-nel.

Lássuk a I. Theorema bizonyítását 2 tényező esetére.

$$xy = P$$

$$x + y = S$$

$$x + \frac{P}{x} = S$$

$$\frac{x^2 + P - Sx}{x} = 0$$

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Ez utóbbi egyenlet gyökei akkor valósak, ha

$$S^2 - 4P \geq 0$$

$$S^2 \geq 4P$$

$$S \geq 2\sqrt{P}$$

S-nek minimuma tehát $2\sqrt{P}$.

Ekkor azonban $x = y = 2\sqrt{P}$.

A Theorema általános érvényességének kimutatására bebizonyítjuk, hogy az érvényes marad $n+1$ tényező esetére, ha érvényes volt n tényező esetére.

$$P = x_0 x_1 x_2 \ldots x_n$$

$$P = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

Tegyünk x_0 helyébe állandó ξ_0 értéket. Az $S - \xi_0$ minimuma akkor következik be, ha

$$x_1 = x_2 \ldots = x_n = \sqrt[n]{\frac{P}{\xi_0}}$$

Tehát

$$S = \xi_0 + n\sqrt[n]{\frac{P}{\xi_0}}.$$

Ha ξ_0-t ismét x_0-lal helyettesítjük az S minimuma keresendő x_0 változó értékeinél.

$$S = x_0 + n\sqrt[n]{\frac{P}{x_0}}.$$

Tegyük fel, hogy

$$x_0 = \frac{1}{y_0^n}\sqrt[n+1]{P}$$

Akkor

$$S = \frac{1}{y_0^n}\sqrt[n+1]{P} + n\sqrt[n]{\frac{P y_0^n}{\sqrt[n+1]{P}}}$$

$$S = \frac{1}{y_0^n}\sqrt[n+1]{P} + n y_0 \sqrt[n]{P^{\frac{n}{n+1}}}$$

$$S = \frac{1}{y_0^n}\sqrt[n+1]{P} + n y_0 \sqrt[n+1]{P}$$

$$S = \frac{1 + ny_0^{n+1}}{y_0^n} \sqrt[n+1]{P}$$

De

$$1 + ny_0^{n+1} = (n+1)y_0^n + (1 - y_0)^2 f(y_0) \qquad 1)$$

hol

$$f(y_0) = 1 + 2y_0 + 3y_0^2 + ny_0^{n-1}$$

Az 1) alatti identitás helyességéről a következőkben győződhetünk meg:

Ugyanis:

$$y_0 f(y_0) = y_0 + 2y_0^2 + 3y^3 + \ldots + ny_0^n$$

$$(1 - y_0) f(y_0) = 1 + y_0 + y_0^2 + \ldots + y_0^{n-1} - ny_0^n$$

$$(1 - y_0) f(y_0) = \frac{1 - y_0^n}{1 - y_0} - ny_0^n$$

$$(1 - y_0)^2 f(y_0) = 1 - (n+1)y_0^n + ny_0^{n+1}$$

$$1 + ny_0^{n+1} = (n+1)y_0^n + (1 - y_0)^2 f(y_0) \quad \text{q. e. d.}$$

Lesz tehát

$$S = \left[n + 1 + \frac{(1 - y_0^n)}{y_0^n} f(y_0) \right] \sqrt[n+1]{P}$$

Hogy az S minimum legyen, kell, hogy az $\dfrac{(1 - y_0^n)}{y_0^n} f(y_0)$ kifejezés, mely mindíg pozitív, mert y_0 is pozitív, minimum legyen. Ennek minimuma pedig 0, mely az $y_0 = 1$ értéknél következik be. Ekkor azonban

$$S = (1 + n) \sqrt[n+1]{P}$$

és

$$x_0 = x_1 = x_2 \ldots x_n = \sqrt[n+1]{P}$$

A Theorema azonban 2 tényező esetére érvényes lévén, a most bizonyítottak alapján érvényes marad bárhány n tényező esetére is.

A II Theorema szerint

$$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

$$P = x_1 . x_2 \ldots x_n$$

és

$$P_{max} = \left(\frac{S}{n} \right)^n = Q$$

Határozzuk meg az

$$y_1,\, y_2,\, \ldots y_n$$

számokat a következő egyenletből:

$$y_k = x_k \sqrt[n]{\frac{Q}{P}}$$

$$(k = 1,\, 2,\, \ldots n)$$

Ekkor

$$y_1,\, y_2,\, \ldots y_n = x_1 = x_2 \ldots x_n \frac{Q}{P} = Q$$

De a Q szorzat tényezői nem egyenlők egymással, mert arányosak az egymástól szintén külömböző $x_1, x_2, \ldots x_n$ számokkal és így az első Theorema értelmében

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n > S;$$

de

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = S \sqrt{\frac{Q}{P}}$$

Tehát

$$S \sqrt[n]{\frac{Q}{P}} > S$$

$$\sqrt[n]{\frac{Q}{P}} > 1$$
$$Q > P$$

Q tehát valóban maximum.

A II. Theoremából levezethető és ezt általánosító a következő:

III. Theorema. Ha n pozitív változó mennyiség összege állandó s egyenlő S-sel, és ha p_1, p_2, $\ldots p_n$ pozitív egész számokat jelentenek, akkor az

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots = P$$

szorzat maximum, midőn

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \ldots \frac{x_n}{p_n}$$

A P szorzat egyidejűleg éri el maximumát a

$$Q = \left(\frac{x_1}{p_1}\right)^{p_1} \left(\frac{x_2}{p_2}\right)^{p_2} \ldots \left(\frac{x_n}{p_n}\right)^{p_n}$$

szorzattal, mert ez a P-től csak állandó szorzóban külömbözik. De a Q szorzat tényezőinek összege

$$p_1 \frac{x_1}{p_1} + p_2 \frac{x_2}{p_2} + \ldots + p_n \frac{x_n}{p_n} = S$$

a Q (és vele együtt a P) tehát akkor maximum, ha tényezői mind egynelők egymással, vagyis ha

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{x_2}{p_2} = \ldots \frac{x_n}{p_n} \qquad \text{q. e. d.}$$

Megfordítva, ha a P pozitív szám n pozitív egész kitevőjű hatvány szorzatával egyenlő, az alapszámok összege akkor *minimum*, ha az alapszámokból és a megfelelő kitevőkből képezett hányadosok egymással mind egyenlők. E tétel az I. Theorema folyománya.

3. *Adva lévén a és b és az általuk bezárt szög γ, ez utóbbi szög mely értékeinél lesz a háromszög körül írt kör sugara minimum.*

$$2R = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}}{\sin\gamma}$$
$$4R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}{1 - \cos^2\gamma}$$

De minthogy

$$2\cos^2\gamma/2 = 1 + \cos\gamma$$
$$2\sin^2\gamma/2 = 1 - \cos\gamma$$

lesz

$$4R^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab - 4ab\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}{4\sin^2\dfrac{\gamma}{2}\cos^2\dfrac{\gamma}{2}}$$

$$4R^2 = \frac{(a+b)^2 \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\gamma}{2}} - 4ab}{4\sin^2\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{(a+b)^2\left(1 + \tan^2\dfrac{\gamma}{2}\right) - 4ab}{4\sin^2\dfrac{\gamma}{2}} =$$

$$= \frac{(a+b)^2\left(1 + \tan^2\dfrac{\gamma}{2}\right)^2 - 4ab\left(1 + \tan^2\dfrac{\gamma}{2}\right)}{4\tan^2\dfrac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{\left[(a+b)^2\tan^2\dfrac{\gamma}{2} + (a-b)^2\right]\left(1 + \tan_2\dfrac{\gamma}{2}\right)}{4\tan^2\dfrac{\gamma}{2}}$$

$$4R^2 = \frac{(a-b)^2 + 2(a^2+b^2)\tan^2\dfrac{\gamma}{2} + (a+b)^2\tan^4\dfrac{\gamma}{2}}{4\tan^2\dfrac{\gamma}{2}}$$

$$4R^2 = \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{4\tan^2\dfrac{\gamma}{2}} + \frac{(a+b)^2\tan^2\dfrac{\gamma}{2}}{4}$$

$$4R^2 - \frac{a^2+b^2}{2} = \frac{(a-b)^2}{4\tan^2\dfrac{\gamma}{2}} + \frac{(a+b)^2\tan^2\dfrac{\gamma}{2}}{4}$$

De a jobboldali összeg összeadandóinak szorzata *állandó*, tehát minimuma akkor következik be, ha

$$\frac{(a-b)^2}{4\tan^2\dfrac{\gamma}{2}} = \frac{(a+b)^2\tan^2\dfrac{\gamma}{2}}{4}$$

Vagyis ha

$$\tan^4\frac{\gamma}{2} = \pm\left(\frac{a-b}{b+b}\right)^2$$

$$\tan^2\frac{\gamma}{2} = \pm\frac{a-b}{b+b}$$

hol a $+$ vagy $-$ jel aszerinti választandó amint $a \gtrless b$.

Ez esetben, ha pl. $a > b$.

$$\begin{aligned} 4R^2 &= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{4(a-b)}(a+b) + \frac{(a+b)^2(a-b)}{4(a+b)} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{4} + \frac{a^2-b^2}{4} \\ &= \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2-b^2}{2} \\ 2R &= a,\ R = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

Ekkor azonban, minthogy

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{a}{a} = 1$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

Vagyis a háromszög derékszögű.

(Folytatjuk)